

Физическое и математическое  
моделирование процессов в геосредах  
(Введение в физику моря и вод суши)

---

---

2021 Лекция №4

---

---

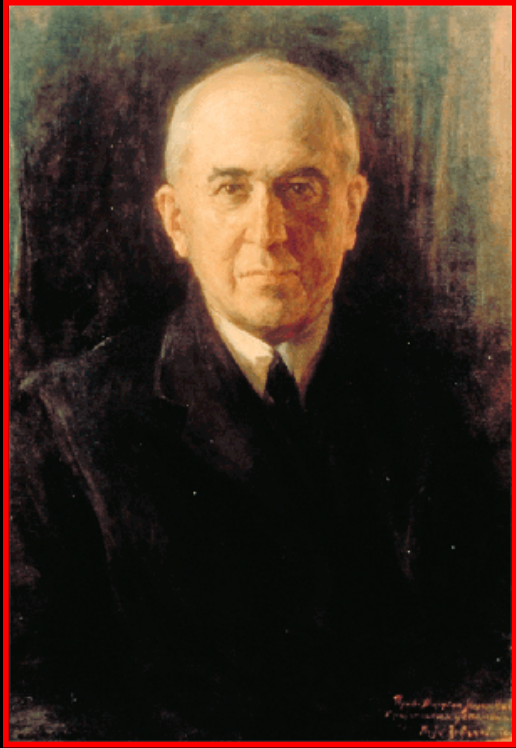
Носов Михаил Александрович  
*отделение геофизики, физический факультет МГУ*

---

---

# Элементы теории климата

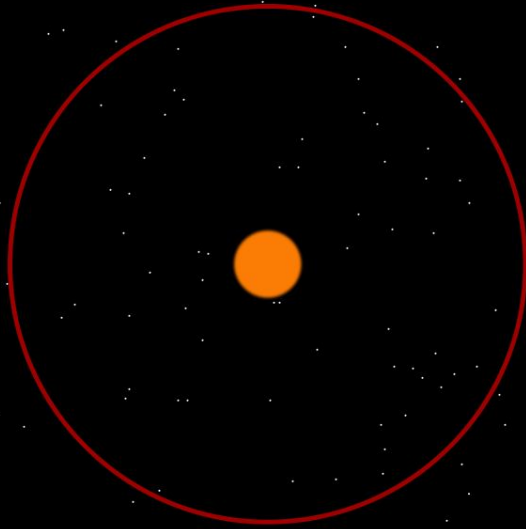
- ❑ **Климатом** называется статистический ансамбль состояний, проходимых климатической системой «Океан-Суша-Атмосфера» за период в несколько десятилетий (~30 лет)
- ❑ **Погода** – мгновенное состояние атмосферы



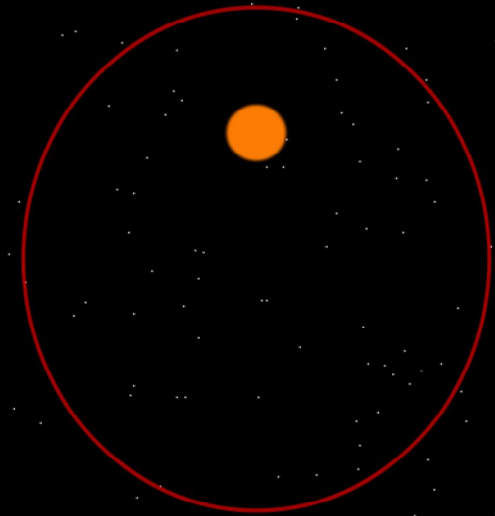
*Милутин Миланкович*  
(1879-1958 гг.)  
сербский математик,  
создавший  
математическую  
теорию климата

## Циклы Миланковича

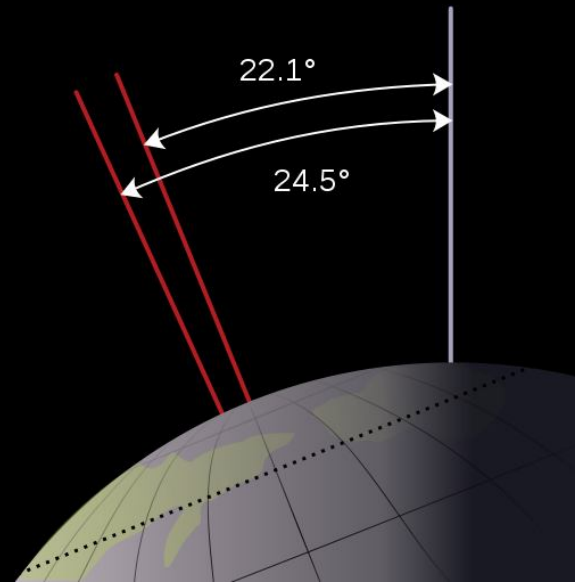
1. Эксцентриситет орбиты:  
0.0007-0.0658 с периодом  
100 тыс. лет
2. Наклон земной оси: 22.07°-  
24.57° с периодом 41 тыс. лет
3. Прецессия: 19 и 23 тыс. лет  
(климатическая прецессия –  
вариации направления оси  
вращения Земли относительно  
плоскости орбиты)



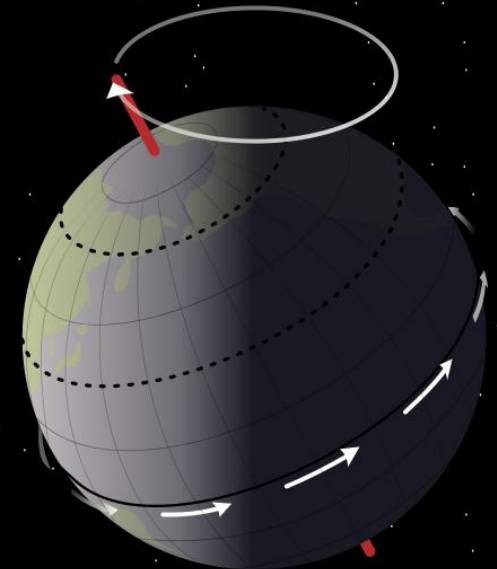
**Эксцентриситет орбиты:  
0.0007-0.0658 с периодом  
~100 тыс. лет**



**Наклон земной оси:  
22.07°-24.57° с  
периодом 41 тыс. лет**



**Прецессия: 19 и 23 тыс. лет  
(климатическая прецессия – вариации  
направления оси вращения Земли  
относительно плоскости орбиты)**



$Q(\varphi) = \text{"Экцентриситет"} + \text{"Наклон оси"} + \text{"Прецессия"}'$

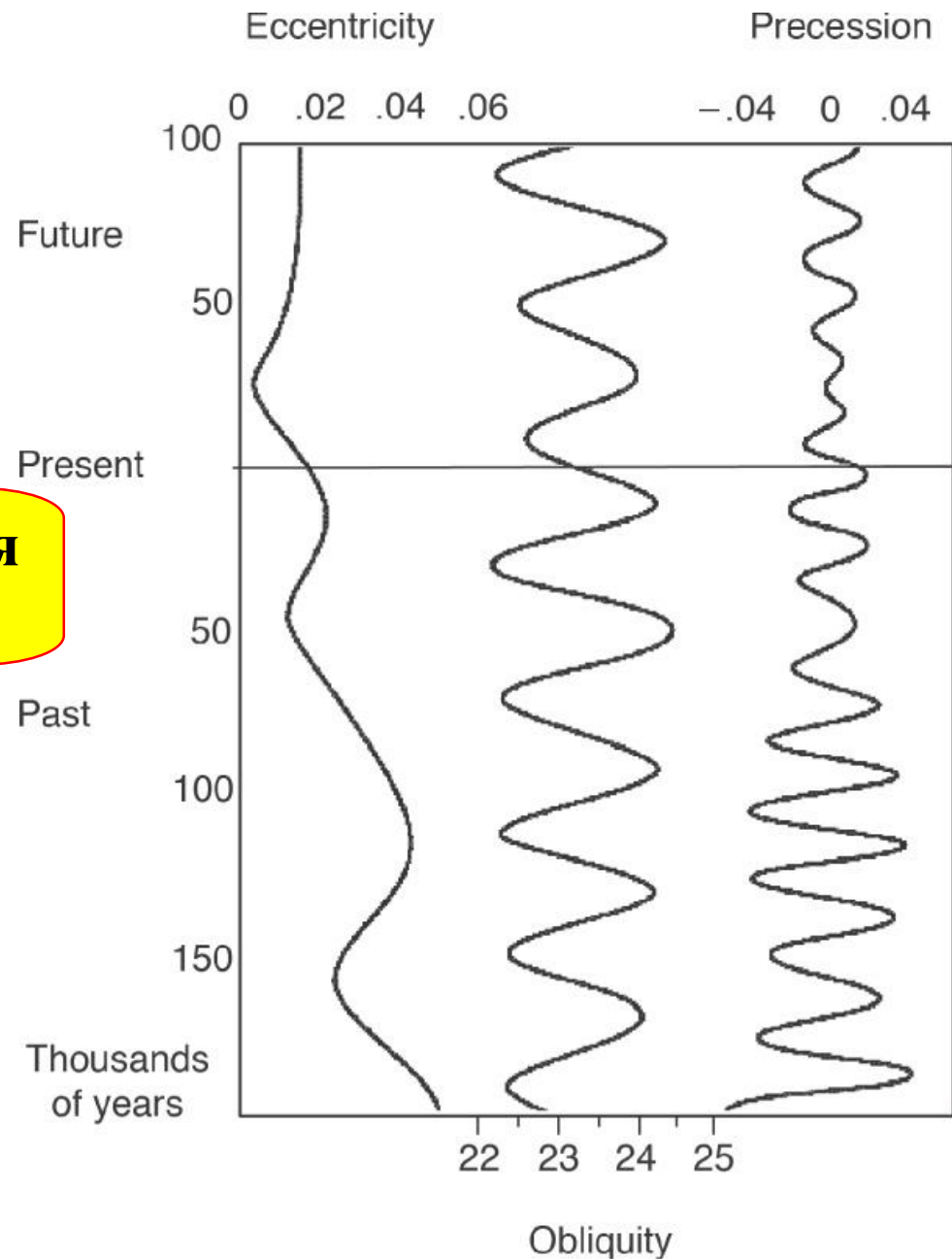
**средняя  
инсоляция на  
широте  $\varphi$**

$\varphi_1(t)$

**эквивалентная  
широта**

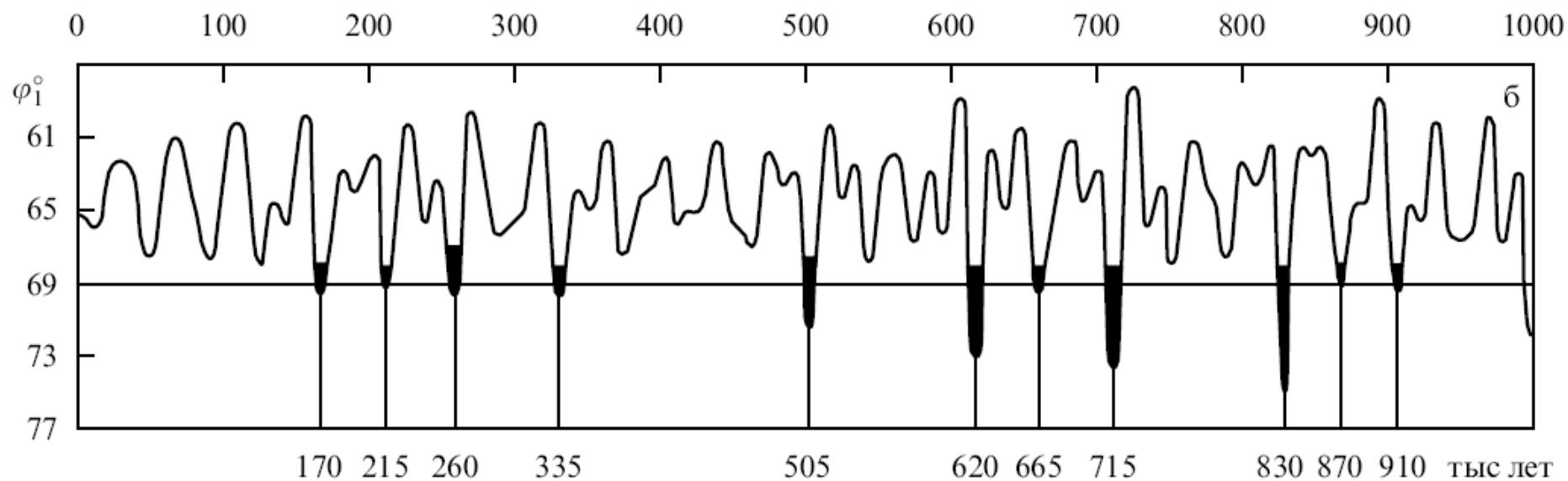
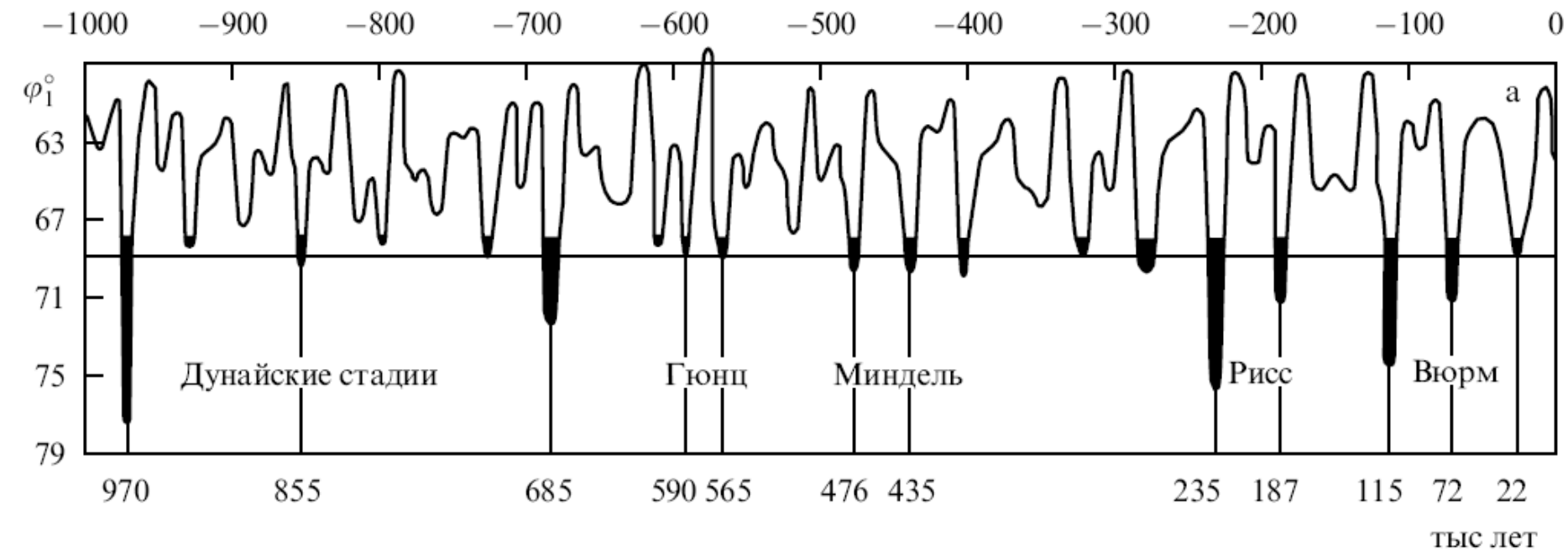
**астрономическая  
эпоха**

$$Q(\varphi_1(t)) = Q(\varphi)$$



(From Berger and Loutre, (1992).)

# Расчет вариаций «эквивалентной широты» ( $65^{\circ}\text{N}$ ) за 1 млн. лет



**никак не связано с  
циклами Миланковича!**

**Малый ледниковый период (XIV—XIX века)**



**Питер Брейгель  
(1565 г.)**

**Элементы  
геофизической  
гидродинамики**



**Геофизическая гидродинамика –  
динамика бароклинной жидкости (газа)  
в поле силы тяжести на неравномерно  
прогретой, вращающейся сфере (геоиде)**

**Классическая гидродинамика**

**бароклинная  
жидкость**

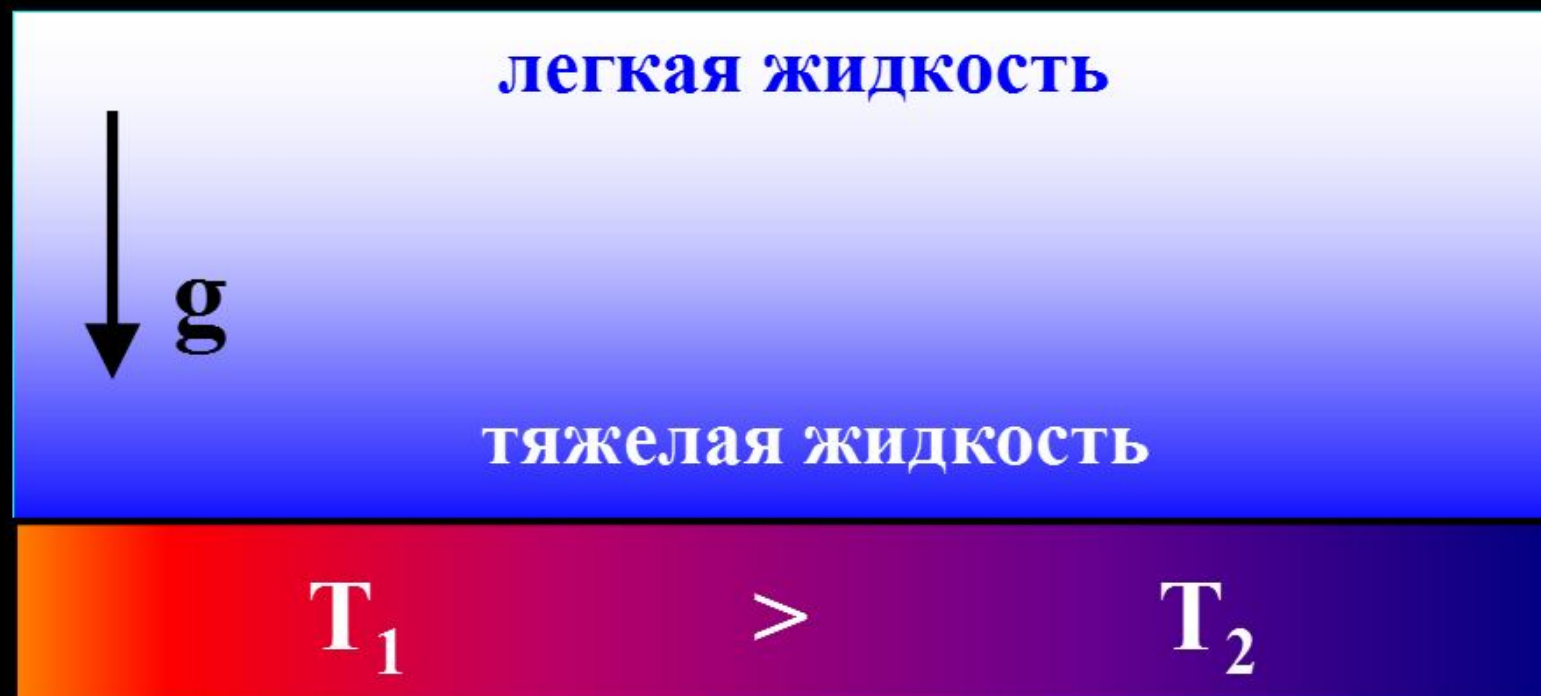
$$\rho = \rho(p, T, \dots)$$

**баротропная  
жидкость**

$$\rho = \rho(p)$$

баротропная  
жидкость

$$\rho = \rho(p)$$

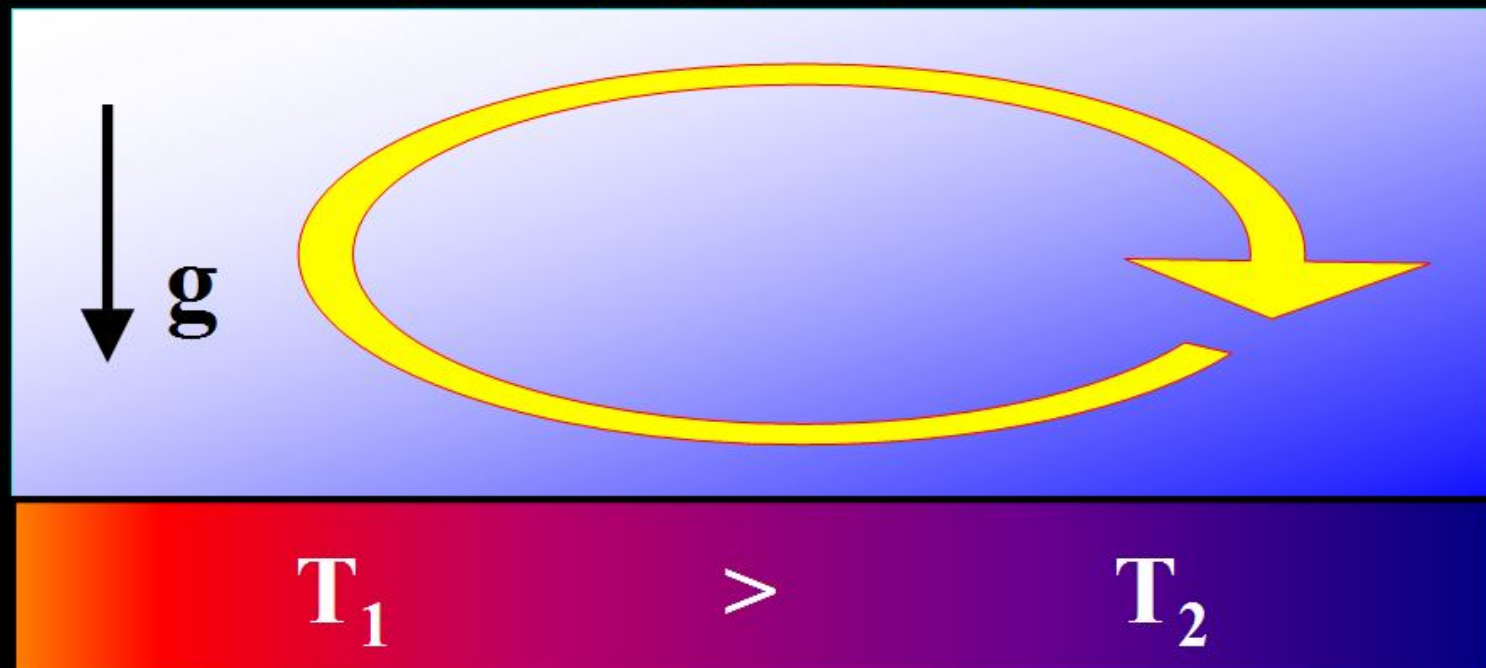


**В баротропной жидкости (газе) температурные градиенты не приводят к возникновению течений!**

реальные атмосфера и океан

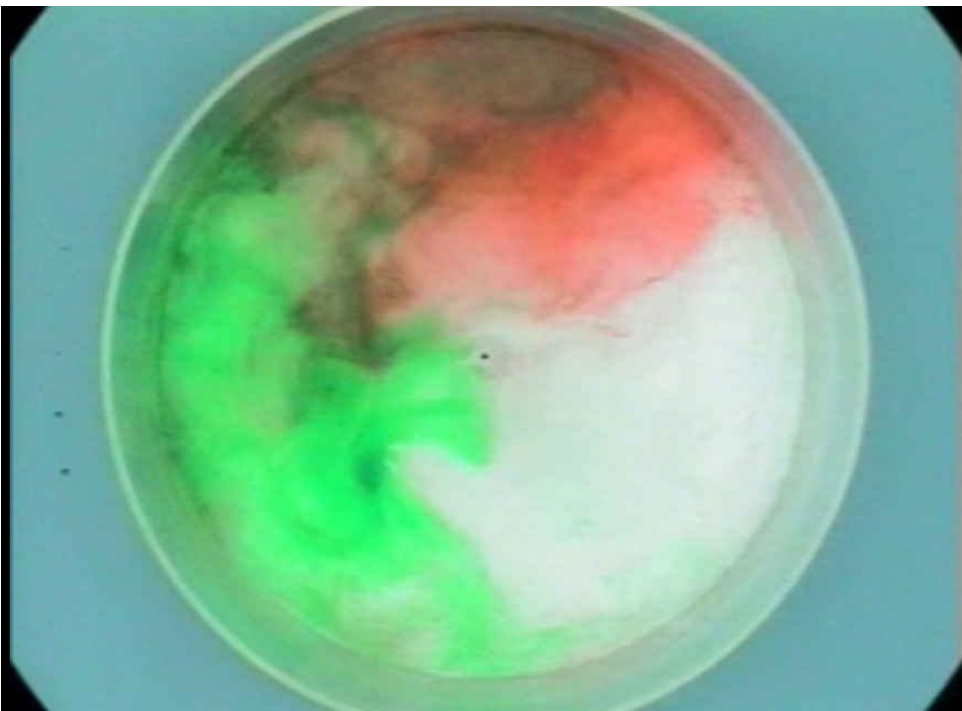
бароклинная  
жидкость

$$\rho = \rho(p, T, \dots)$$



В бароклинной жидкости (газе) температурные градиенты приводят к возникновению течений!

# Влияние вращения Земли





**Gaspard-Gustave de Coriolis**  
**French, Mathematics, Physics**  
**1792-1843**

$$\mathbf{F}_{\text{Kop}} = 2m[\vec{v} \times \vec{\omega}]$$

**Геофизическая гидродинамика –  
динамика бароклинной жидкости (газа)  
в поле силы тяжести на неравномерно  
прогретой, вращающейся сфере (геоиде)**

---

**Большинство крупномасштабных течений атмосферы  
и гидросферы происходят в условиях баланса сил:**

**по вертикали:**

**гидростатический баланс**

*сила градиента давления = сила тяжести*

**по горизонтали:**

**геострофический баланс**

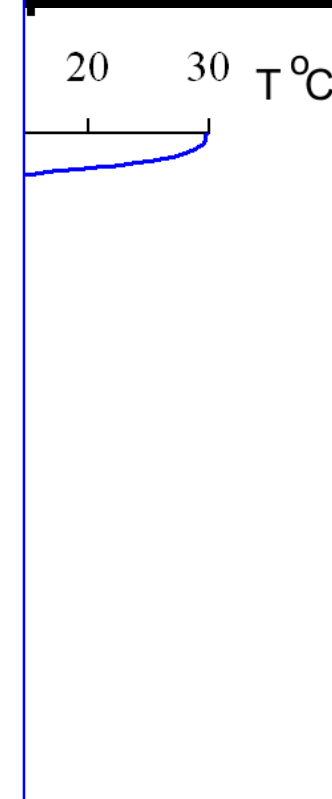
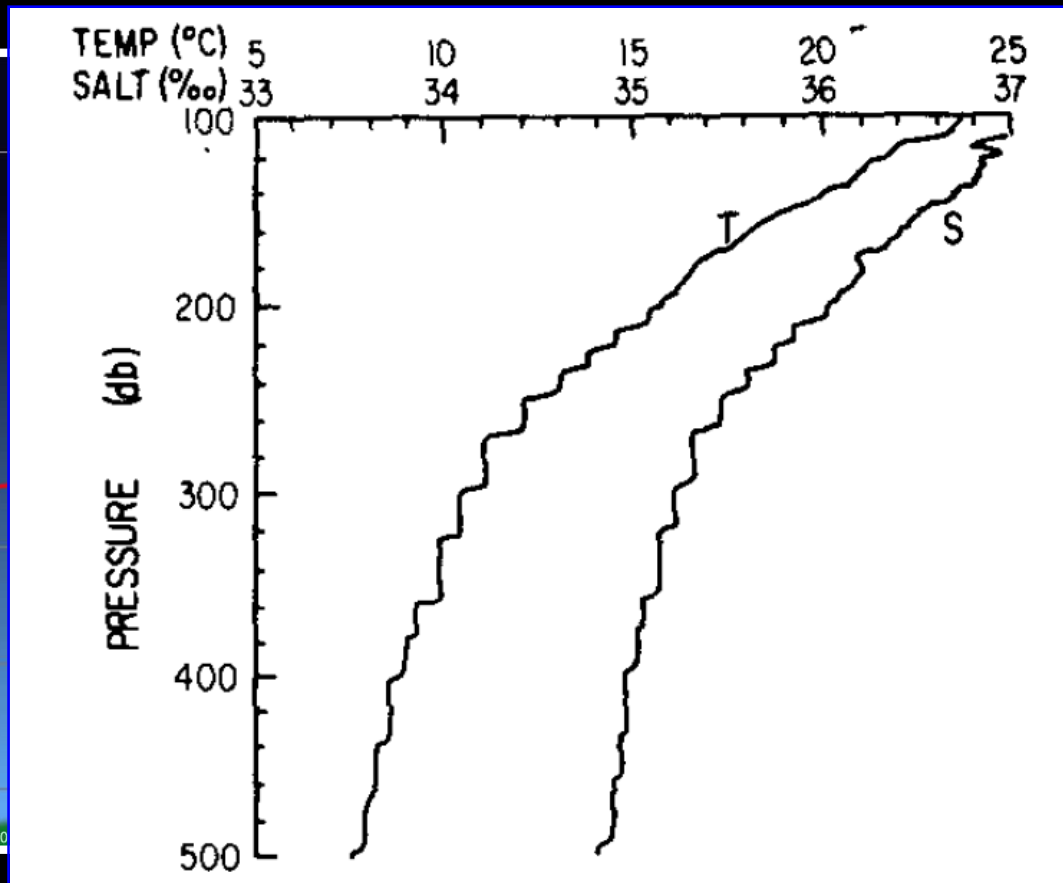
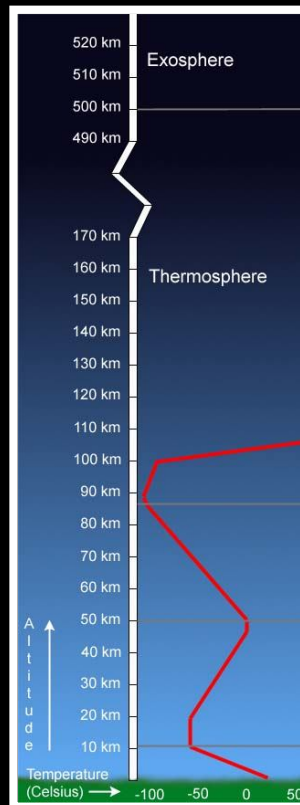
*сила градиента давления = сила Кориолиса*

# **Устойчивость стратификации**

# Стратификация –

(лат. *stratum* настил слой+ *facere* делать)

распределение по вертикали слоев воды или воздуха с различной плотностью, температурой, соленостью, etc.





Геофизическая гидродинамика –  
динамика бароклинной жидкости (газа)  
в поле силы тяжести на неравномерно  
прогретой, вращающейся сфере (геоиде)

---

**Большинство крупномасштабных течений атмосферы  
и гидросферы происходят в условиях баланса сил:**

по вертикали:

**гидростатический баланс**

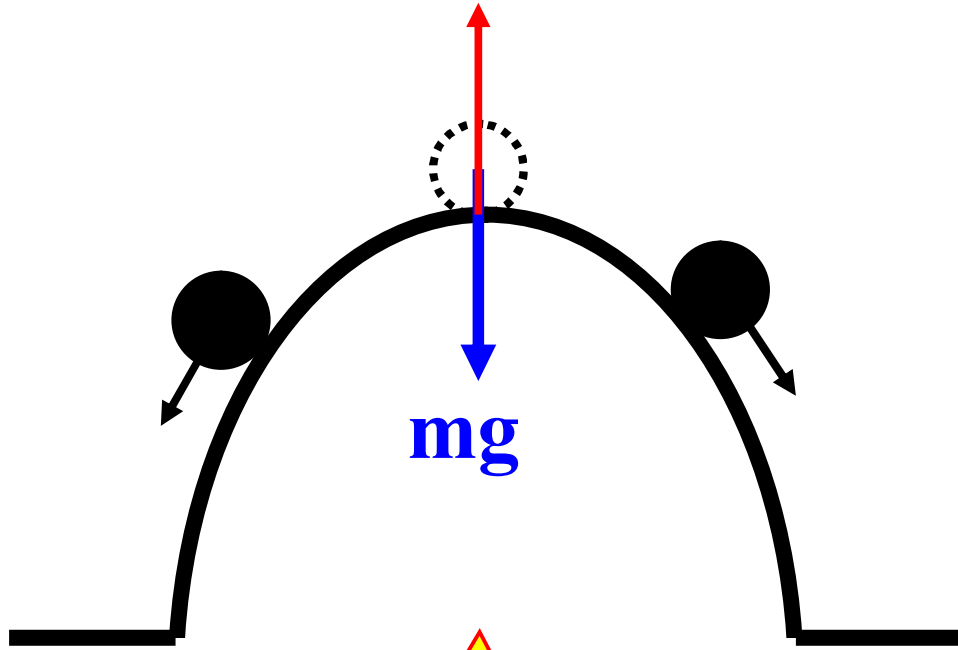
*сила градиента давления = сила тяжести*

по горизонтали:

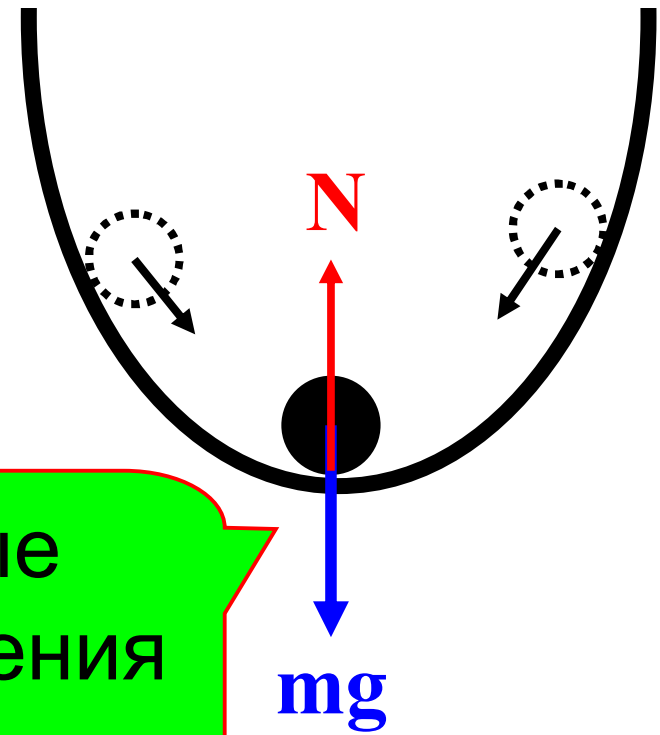
геострофический баланс

*сила градиента давления = сила Кориолиса*

# **N** Устойчивость



Малые  
возмущения  
нарастают со  
временем



Малые  
возмущения  
затухают

# Стратификация устойчива?

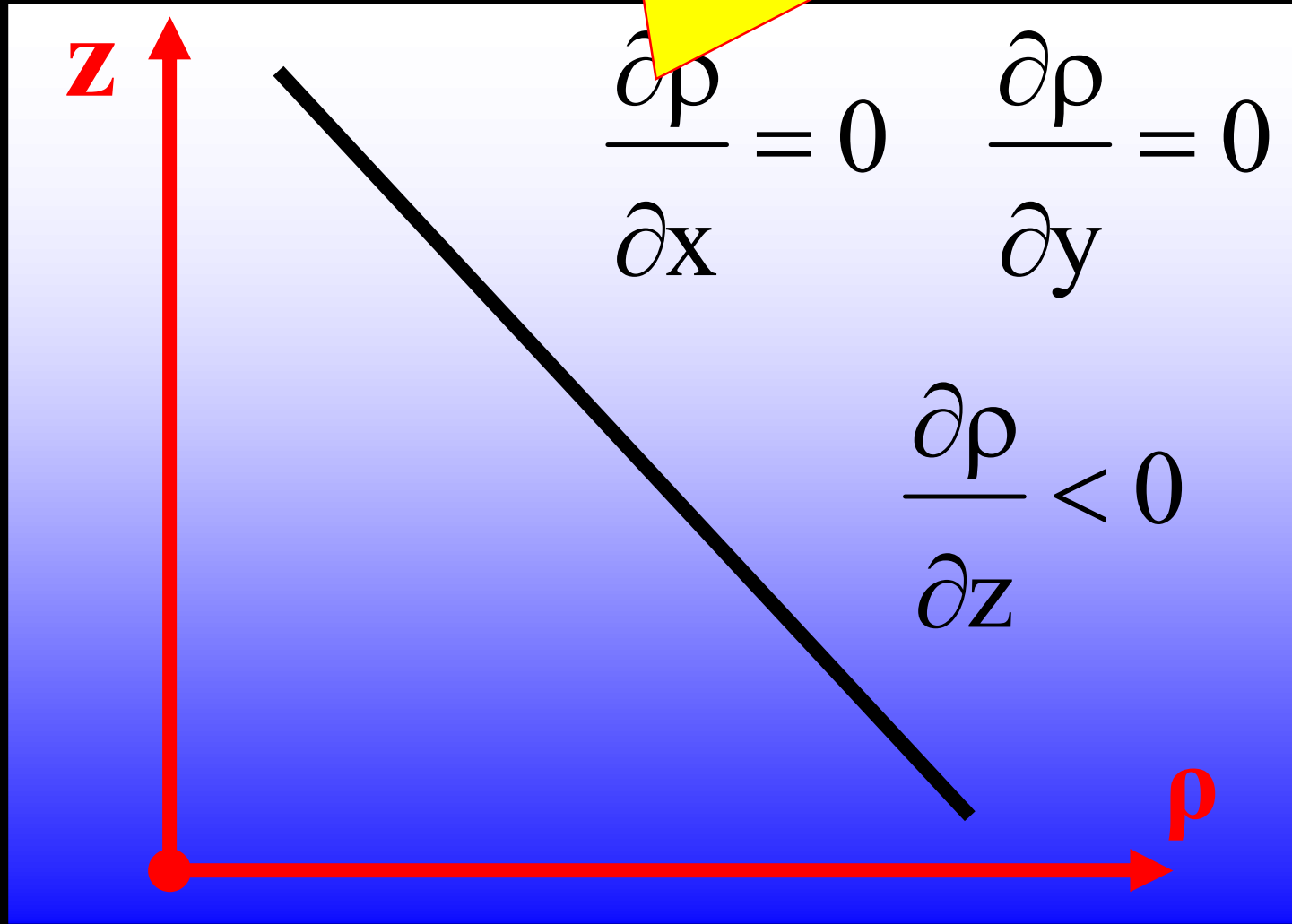
$\rho$

$z$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$$

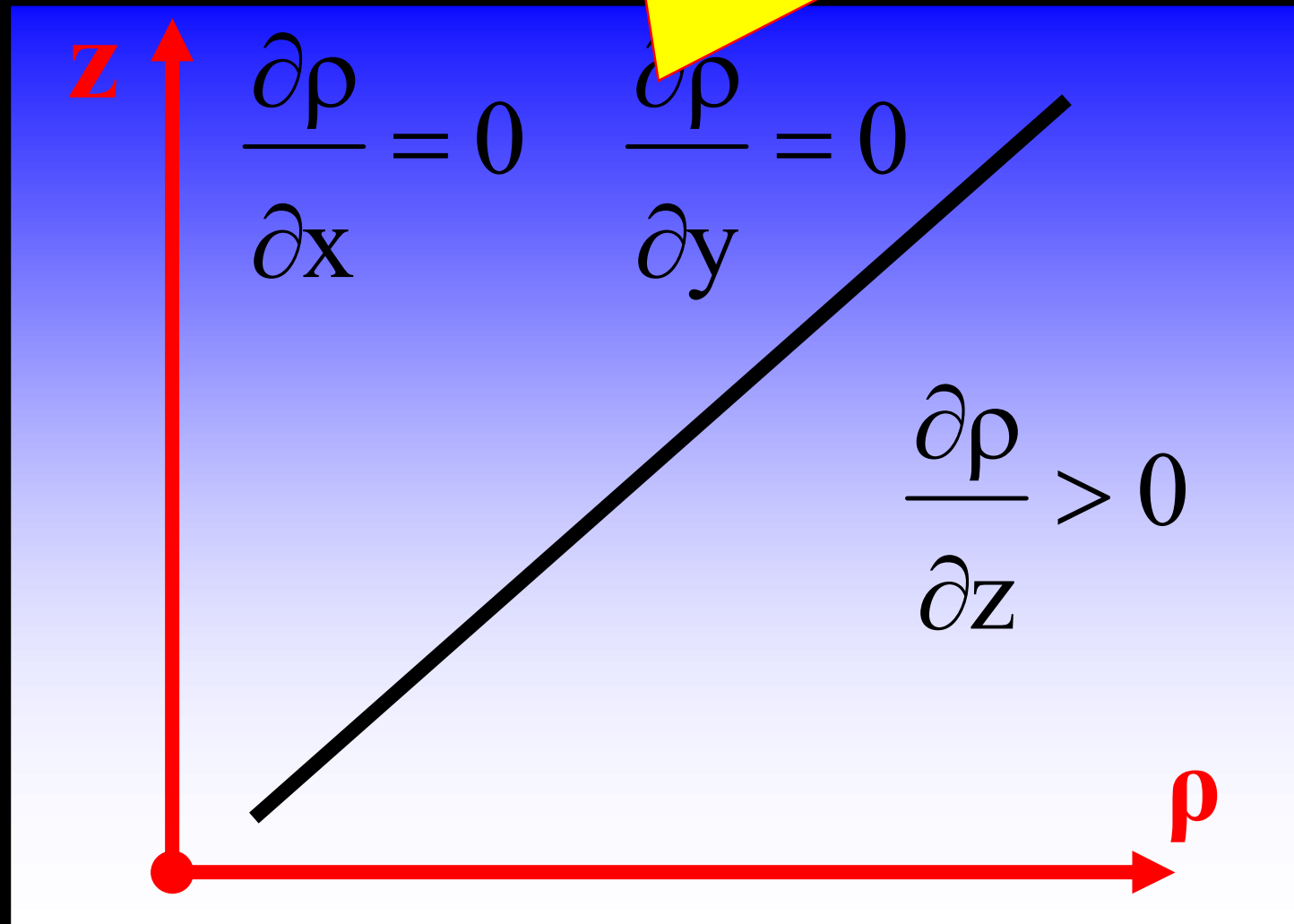
$$\frac{\partial \rho}{\partial z} < 0$$

$\rho$

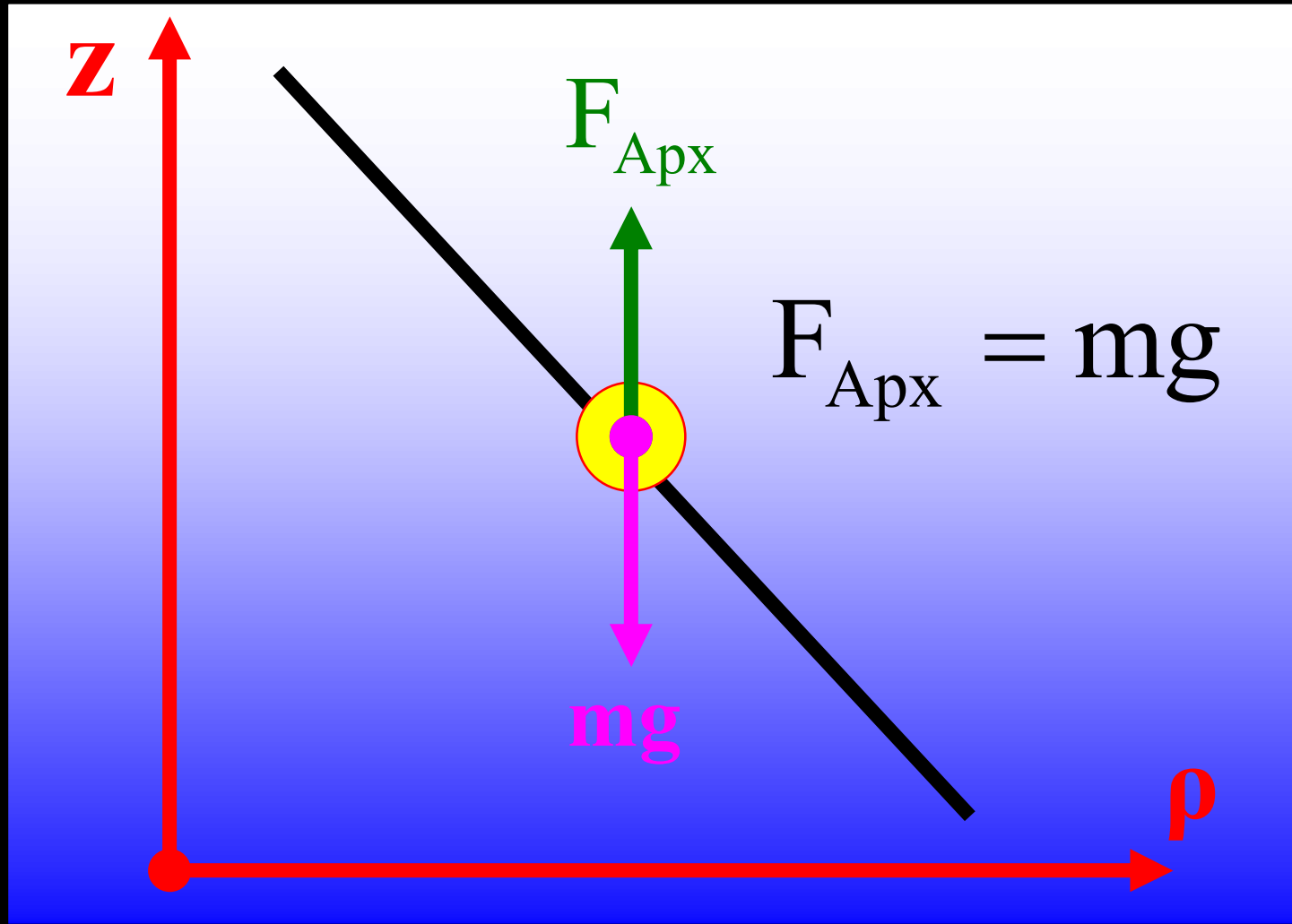


Стратификация  
устойчива?

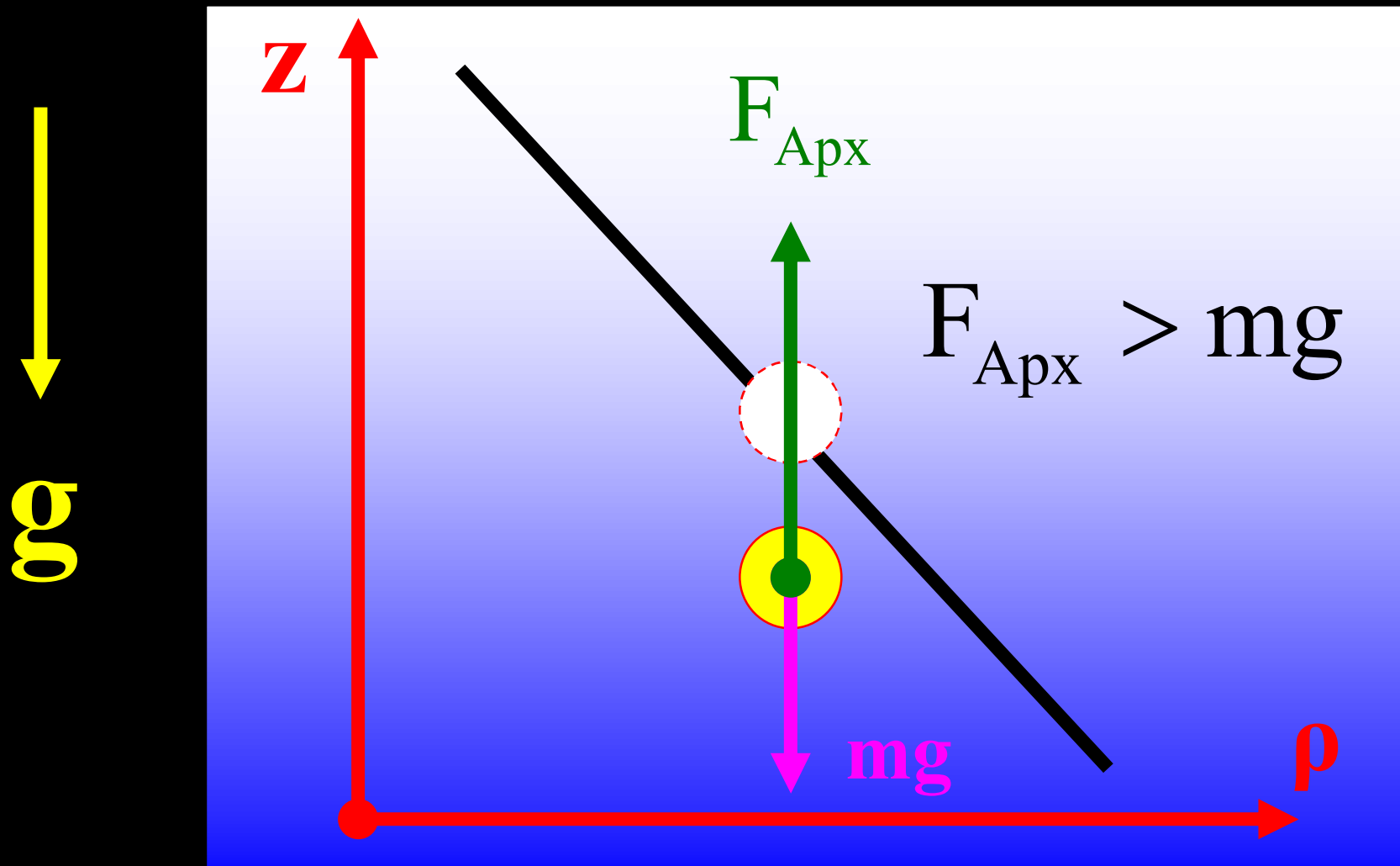
↓  
ρ



$\rho$

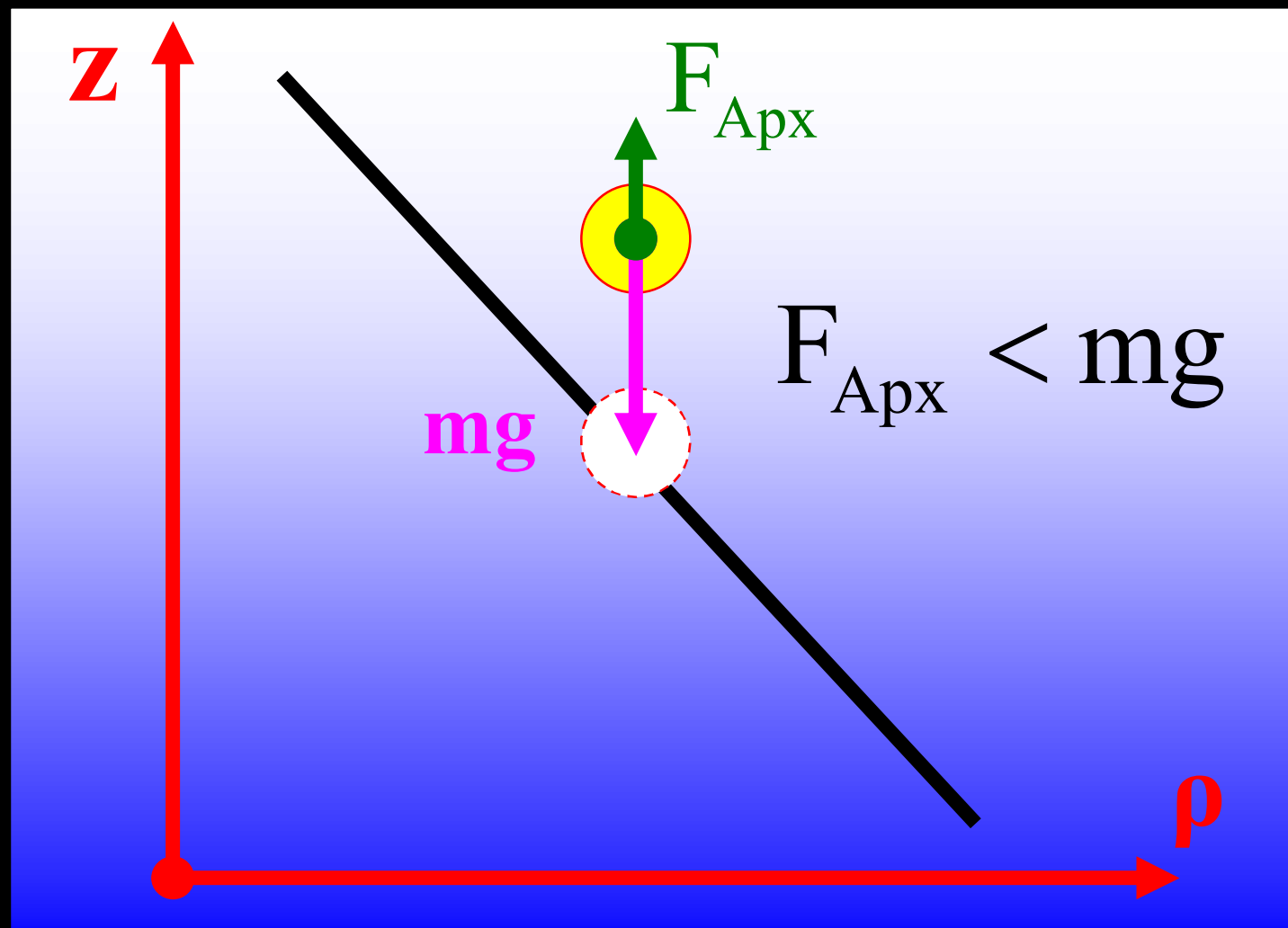


Разница сил возвращает частицу  
в исходное положение

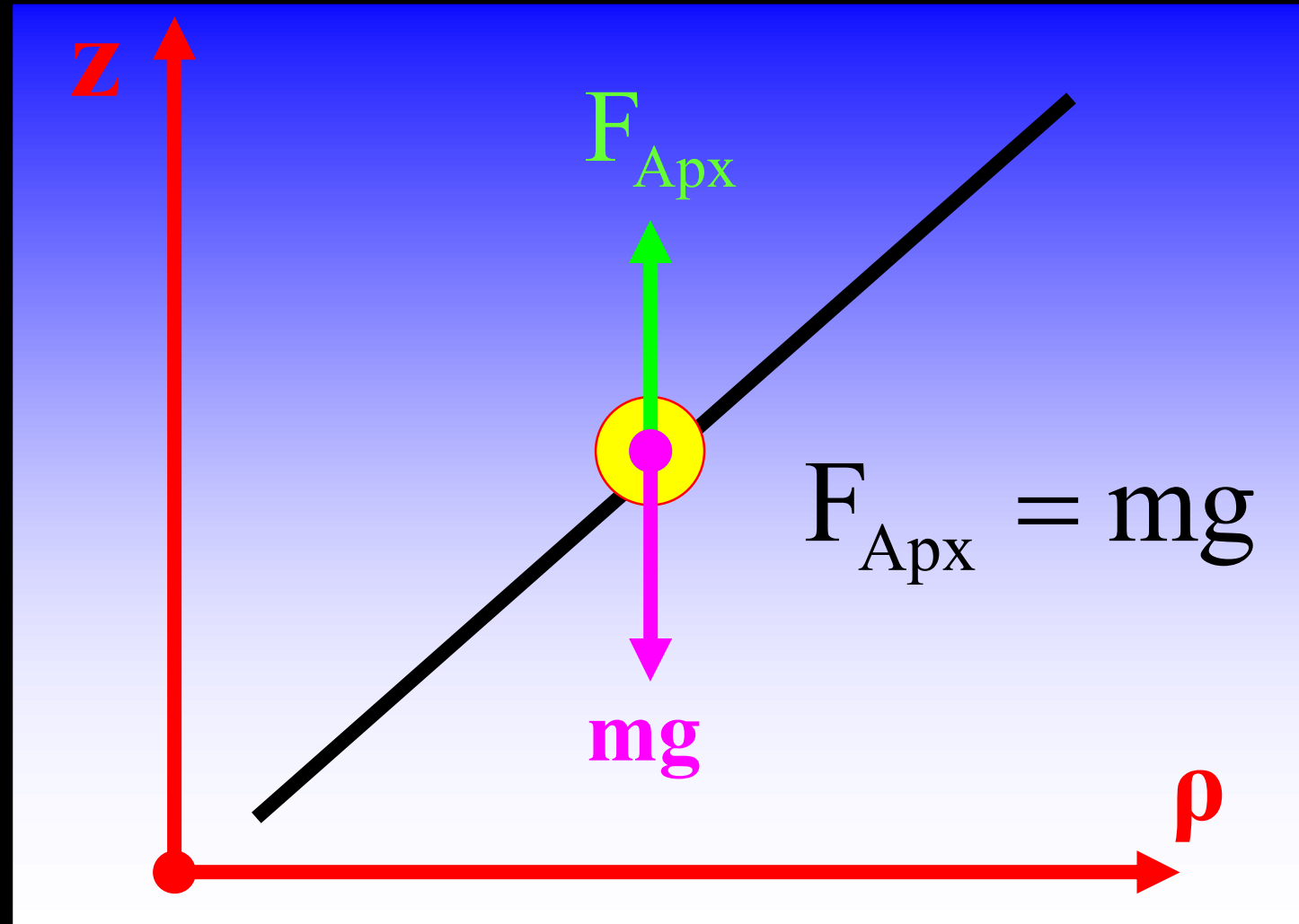


Разница сил возвращает частицу  
в исходное положение

$\rho$



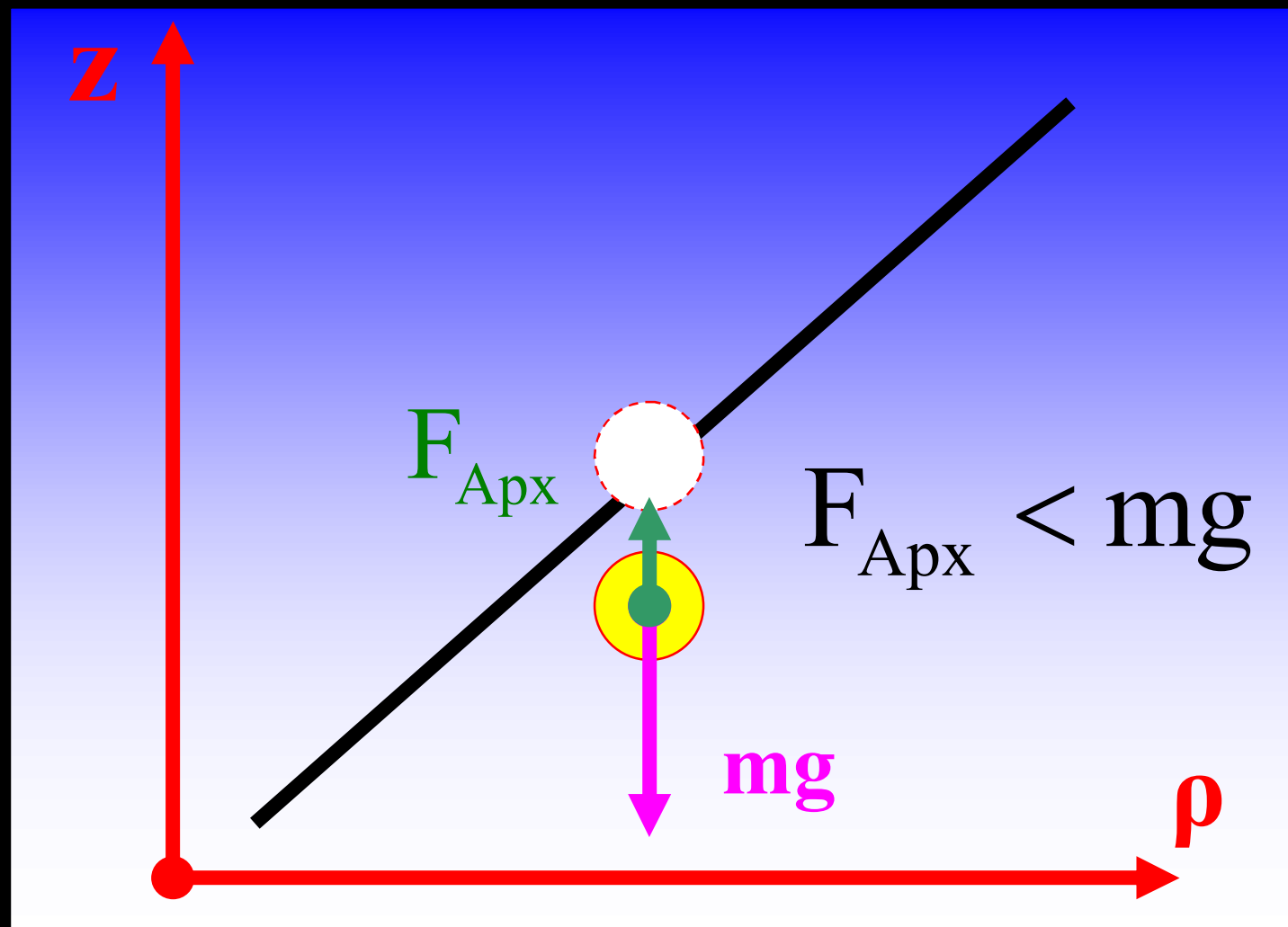
$g$





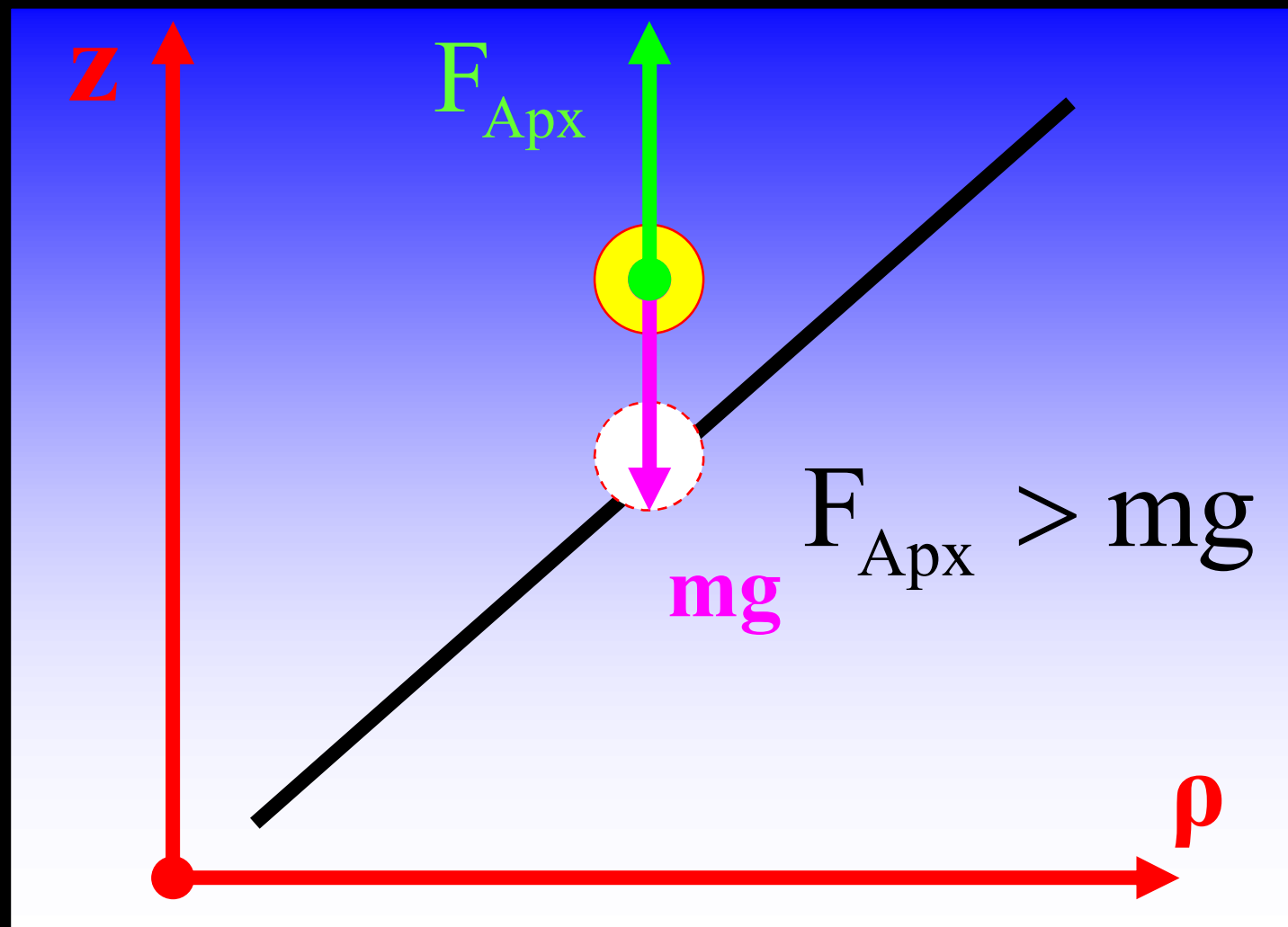
Разница сил способствует удалению  
частицы от положения равновесия

$\omega$



Разница сил способствует удалению  
частицы от положения равновесия

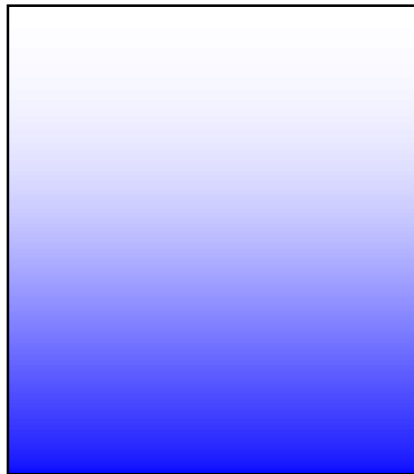
$\omega$



# Критерий устойчивости

устойчивое  
состояние

$$\frac{d\rho}{dz} < 0$$



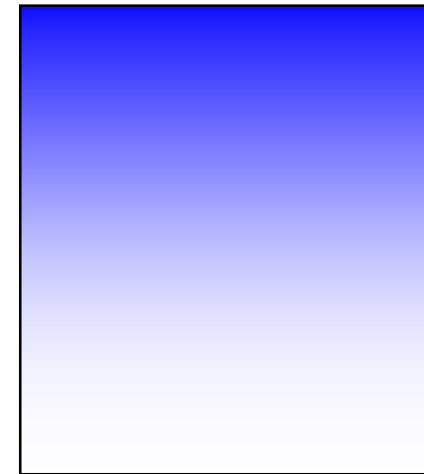
нейтральное  
состояние

$$\frac{d\rho}{dz} = 0$$

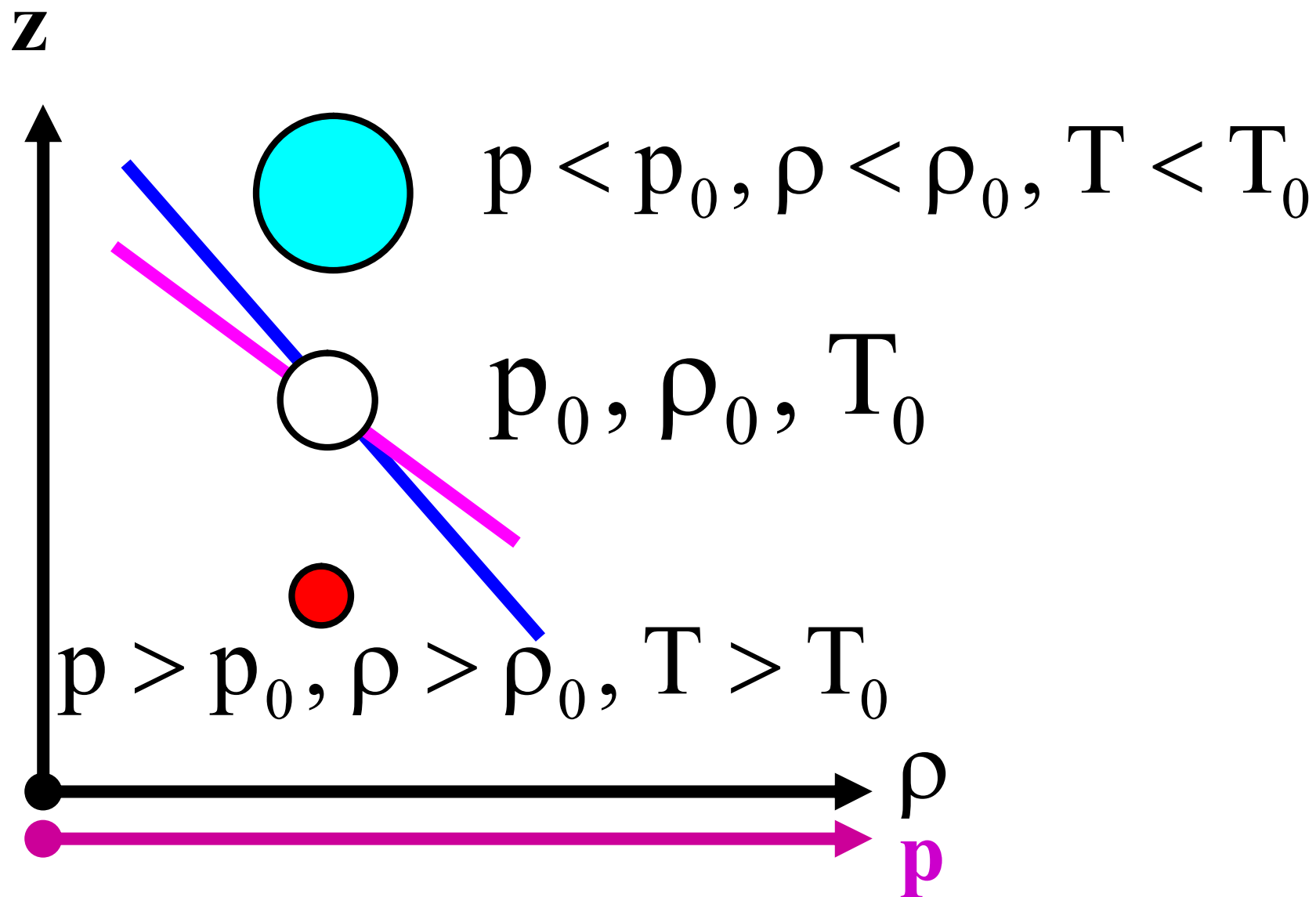


неустойчивое  
состояние

$$\frac{d\rho}{dz} > 0$$



# Нейтральное состояние



## Нейтральное состояние

$$\left. \frac{d\rho}{dz} \right|_{\text{нейтр}} = \left( \frac{d\rho}{dz} \right)_s = \left( \frac{d\rho(p(z))}{dz} \right)_s = \left( \frac{d\rho}{dp} \right)_s \frac{dp}{dz}$$

$$\left( \frac{d\rho}{dp} \right)_s$$

$$= \frac{1}{c^2}$$

**скорость  
звука**

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

$$\left. \frac{d\rho}{dz} \right|_{\text{нейтр}} = -\frac{\rho g}{c^2}$$

**закон  
гидростатики**

# Критерий устойчивости

устойчивое  
состояние

$$\frac{d\rho}{dz} < \left( \frac{d\rho}{dz} \right)_s$$

нейтральное  
состояние

$$\frac{d\rho}{dz} = \left( \frac{d\rho}{dz} \right)_s$$

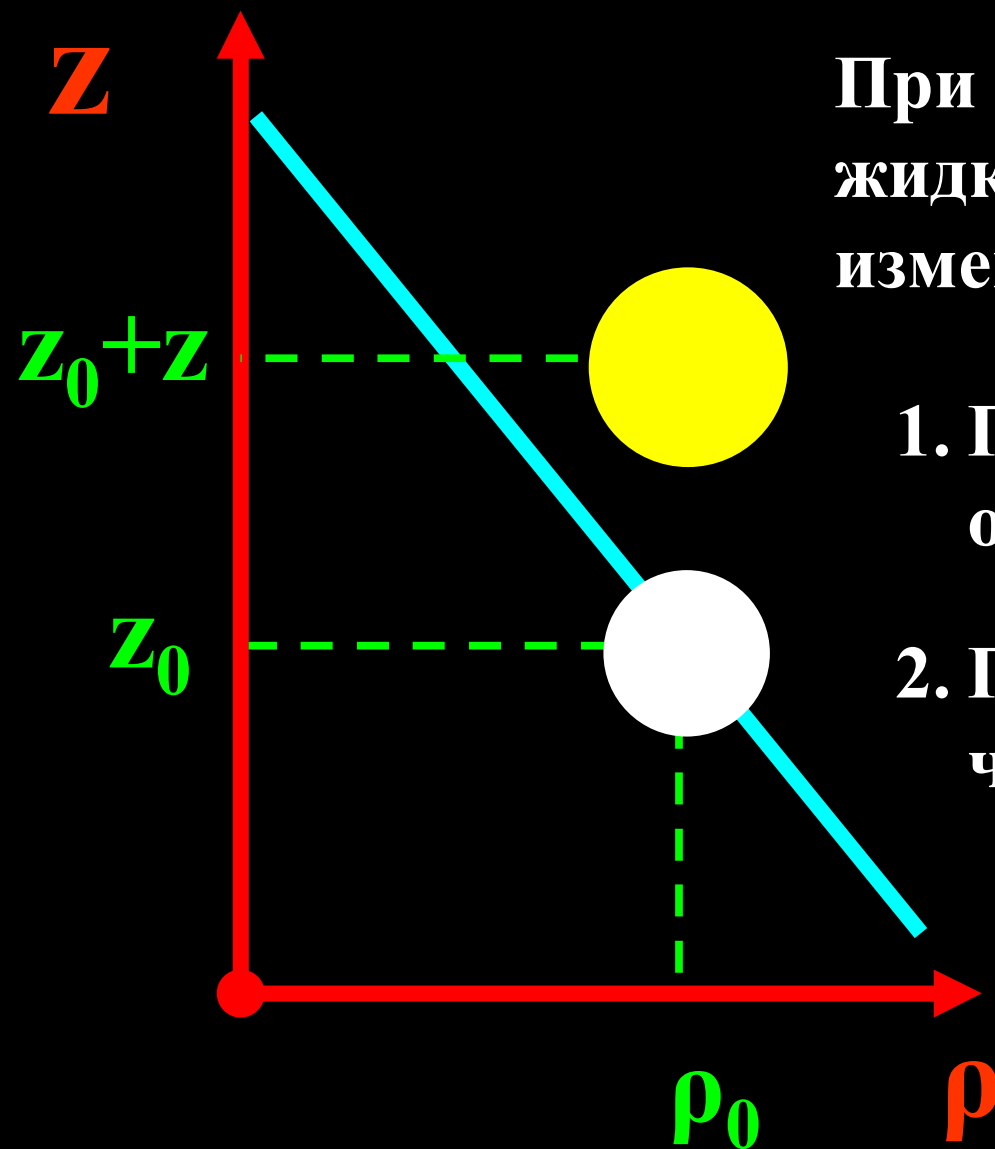
неустойчивое  
состояние

$$\frac{d\rho}{dz} > \left( \frac{d\rho}{dz} \right)_s$$

$$\left. \frac{d\rho}{dz} \right|_{\text{нейтр}} = -\frac{\rho g}{c^2} \equiv \left( \frac{d\rho}{dz} \right)_s$$

адиабатический  
градиент

# Частота малых колебаний устойчиво стратифицированной жидкости (газа)



При ее смещении частицы жидкости по вертикали на  $Z$  изменяются:

1. Плотность окружающей среды
2. Плотность самой частицы

$$m \ddot{z} = F_{\text{Арх}} - mg$$

$$dV = dx dy dz$$

$$\rho dV \ddot{z} = dV g (\rho_{\text{среды}} - \rho_{\text{частицы}})$$

$$\ddot{z} = g (\rho_{\text{среды}} - \rho_{\text{частицы}}) / \rho$$

$$\rho_{\text{среды}} = \rho_0 + \frac{d\rho}{dz} z$$

$$\rho_{\text{частицы}} = \rho_0 + \left( \frac{d\rho}{dz} \right)_s z$$

$$\ddot{z} - \frac{g}{\rho} \left( \frac{d\rho}{dz} - \left( \frac{d\rho}{dz} \right)_s \right) z = 0$$



$$\ddot{z} - \frac{g}{\rho} \left( \frac{d\rho}{dz} - \left( \frac{d\rho}{dz} \right)_s \right) z = 0$$

$$\ddot{z} + N^2 z = 0$$

**Частота  
Вяйсяля-  
Брента**

в океане / атмосфере

$$N \sim 10^{-4} - 10^{-1} \text{ Гц}$$

$$N^2 = -\frac{g}{\rho} \left( \frac{d\rho}{dz} - \left( \frac{d\rho}{dz} \right)_s \right)$$

**ИЛИ**

$$N^2 = -\frac{g}{\rho} \left( \frac{d\rho}{dz} + \frac{\rho g}{c^2} \right)$$

$$\ddot{z} + N^2 z = 0 \quad N = \sqrt{-\frac{g}{\rho} \left( \frac{d\rho}{dz} + \frac{\rho g}{c^2} \right)}$$

**N – действительная величина**

**Устойчивая  
стратификация**

$$z(t) = A \cdot \sin(N \cdot t) + B \cdot \cos(N \cdot t)$$

**N – мнимая величина**

**Неустойчивая  
стратификация**

$$z(t) = A \cdot \exp(N \cdot t) + B \cdot \exp(-N \cdot t)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}]$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla}) T = \dots$$

# Уравнения гидродинамики

# Уравнение состояния

$$\rho = \rho(p, T, \dots)$$

парциальное давление  
водяного пара

**воздух**

$$\rho = \rho(p, T, e)$$

соленость

**вода**

$$\rho = \rho(p, T, s)$$

## Уравнение состояния воздуха

$$p = \frac{m}{V} \frac{R}{\mu} T = \rho \frac{R}{\mu} T \equiv \rho R_a T$$

$$R_a \equiv \frac{R}{\mu} = \frac{8.31 \left[ \frac{\text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{МОЛЬ}} \right]}{0.029 \left[ \frac{\text{КГ}}{\text{МОЛЬ}} \right]} \approx 287 \left[ \frac{\text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{КГ}} \right]$$

$$p = \rho R_a T \Rightarrow \rho = \frac{p}{R_a T}$$

**Уравнение состояния  
СУХОГО воздуха**

при Н.У.

$$p = 101325 \text{ Па}$$

$$T = 273.16 \text{ К}$$

$$\left. \begin{array}{l} p = 101325 \text{ Па} \\ T = 273.16 \text{ К} \end{array} \right\} \Rightarrow \rho \approx 1.29 \text{ кг / м}^3$$

$$p_a = \rho_a R_a T \quad \text{водяной пар} \quad e = \rho_w R_w T$$

$$\rho = \rho_a + \rho_w = \frac{p_a}{R_a T} + \frac{e}{R_w T} = \frac{p - e}{R_a T} + \frac{e}{R_w T}$$

Уравнение состояния влажного воздуха

$$\rho = \frac{p}{R_a T} \left( 1 - \frac{e}{p} \left[ 1 - \frac{R_a}{R_w} \right] \right) \approx \frac{p}{R_a T} \left( 1 - 0.38 \frac{e}{p} \right)$$

$$e \sim 10^3 \text{ Па} \Rightarrow \frac{e}{p} \ll 1$$



- ❑ Концентрация пара резко падает с высотой
- ❑ В высоких широтах воздух менее влажный чем в тропиках
- ❑ Осадки – концентрация пара, поднятого на высоту конвекцией
- ❑ Содержание пара в атмосфере Земли варьировалось в прошлом в соответствии с ходом температуры



# Уравнение состояния морской воды

$$\rho = \rho(p, T, s)$$

$$\rho = 1 + 10^{-3} (\varepsilon_1 s + \varepsilon_2 T - \varepsilon_3 s T - \varepsilon_4 T^2 + \varepsilon_5 p) \quad [\text{г/см}^3]$$

$$\varepsilon_1 = 0.82$$

$$\varepsilon_2 = 0.0689 \quad s \quad [^{\circ}/_{\infty}]$$

$$\varepsilon_3 = 0.0039 \quad T \quad [^{\circ}\text{C}]$$

$$\varepsilon_4 = 0.00918 \quad p \quad [\text{дбар}]$$

$$\varepsilon_5 = 4.5 \cdot 10^{-3}$$

# Уравнение состояния морской воды

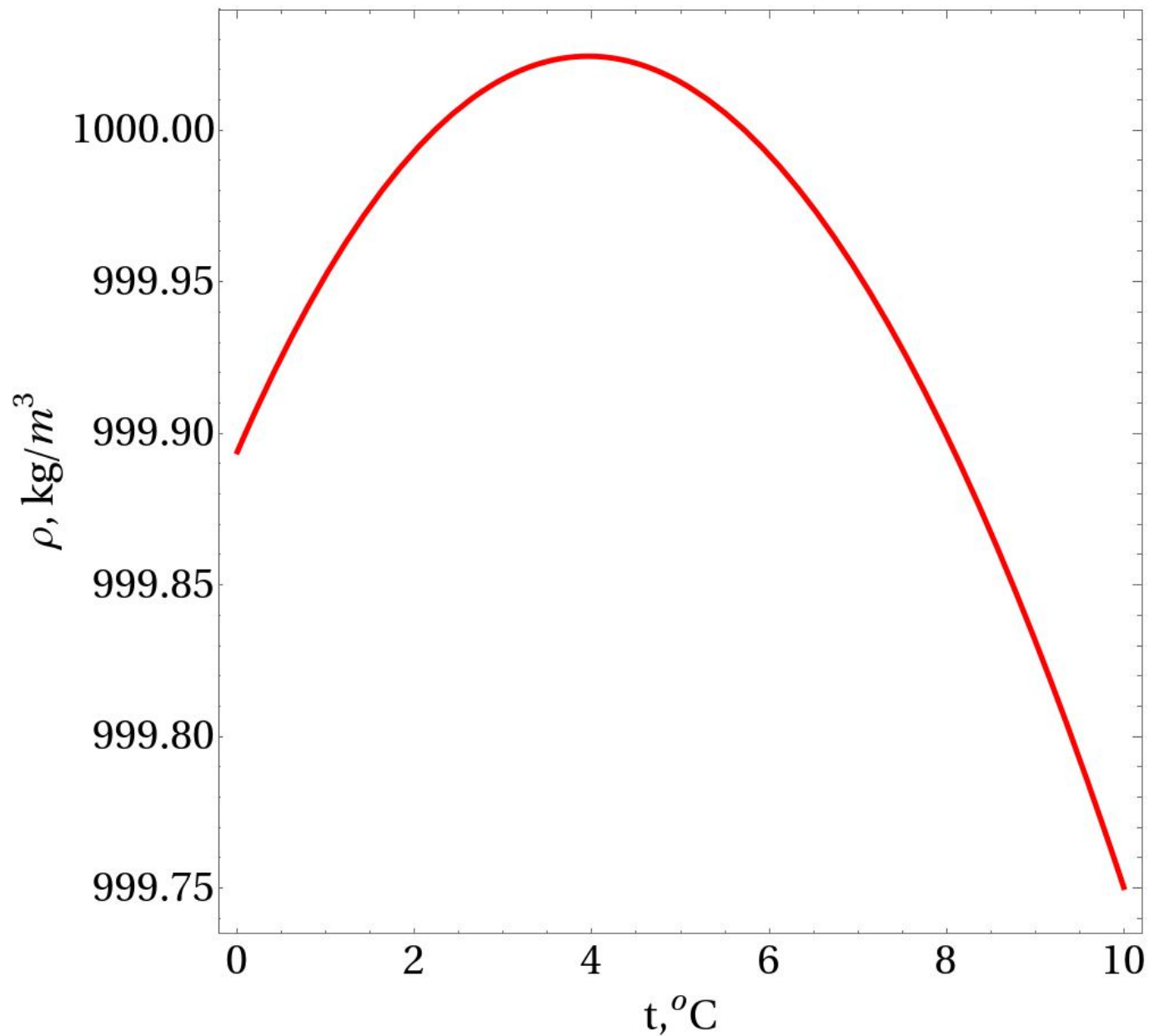
$$\rho = \rho(p, T, s)$$

Уравнение Чена-Миллеро содержит **48 (!!!)**  
эмпирических констант

**The International Thermodynamic  
Equation of Seawater – 2010 (TEOS-10)**

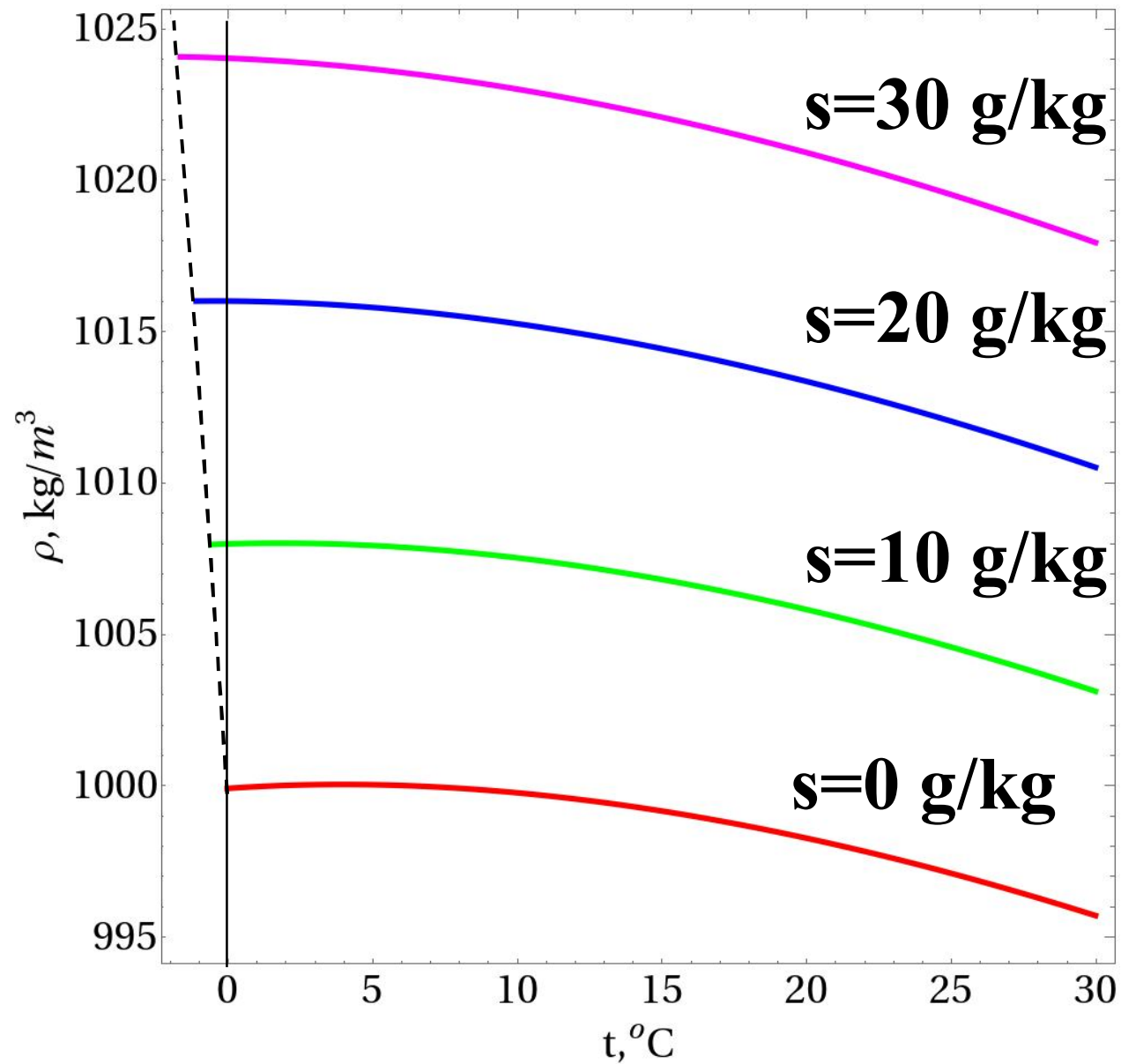
[www.teos-10.org](http://www.teos-10.org)

**TEOS-10 – уравнение для потенциала Гиббса**

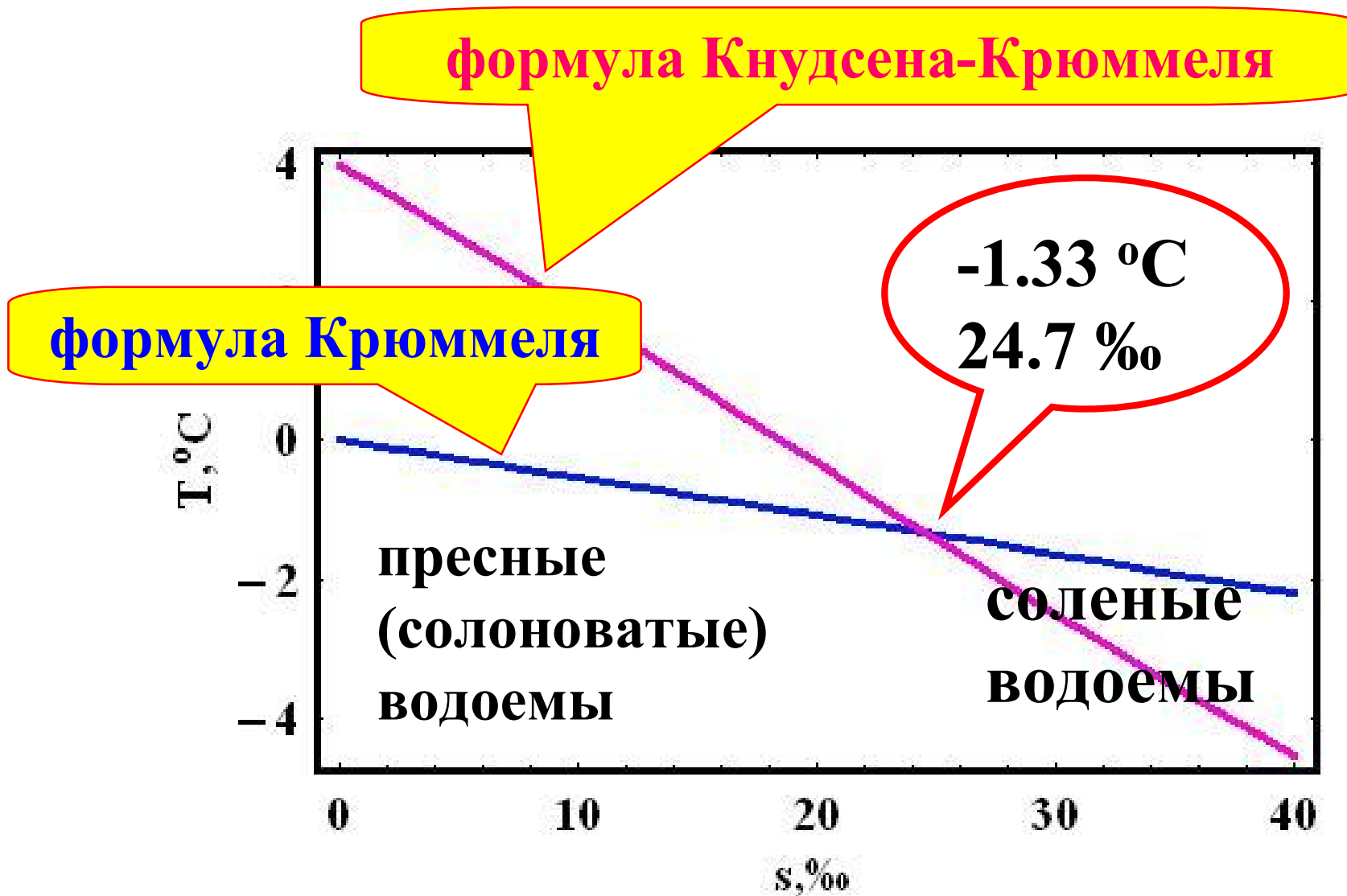


**у пресных (солонватых) вод существует  
«температура максимальной плотности»**

# Плотность морской воды как функция температуры и солёности



# Температура замерзания и максимальной плотности как функция солености



# **Уникальные свойства воды**

- 1. существование температуры максимальной плотности у пресных (солонатовых) вод**
- 2. плотность льда < плотности воды**  
**917 кг/м<sup>3</sup>                      999.8 кг/м<sup>3</sup>**
- 3. высокая теплоемкость воды и широкий диапазон существования жидкой фазы**
- 4. вода – эффективный растворитель**