Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах

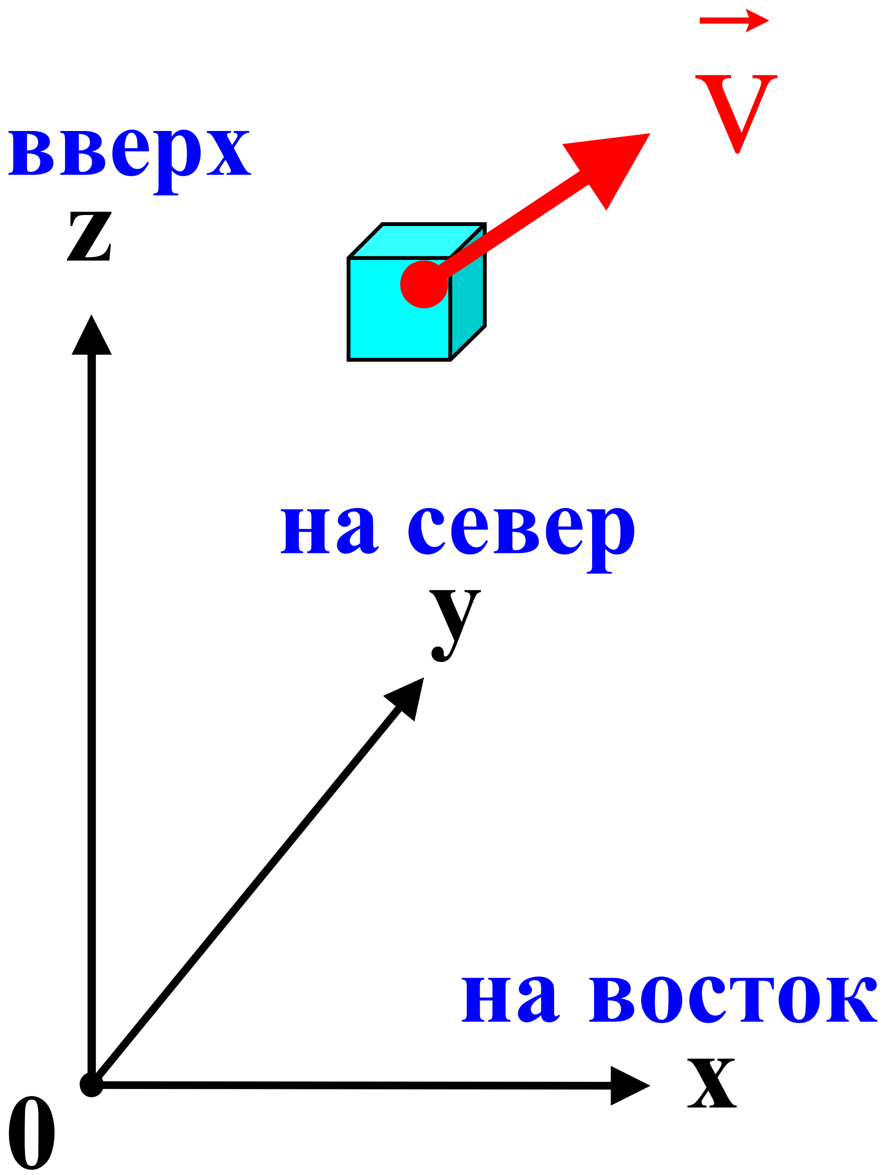
(Введение в физику моря и вод суши)

2021 Лекция №5

Носов Михаил Александрович

отделение геофизики, физический факультет МГУ

Уравнения (геофизической) гидродинамики



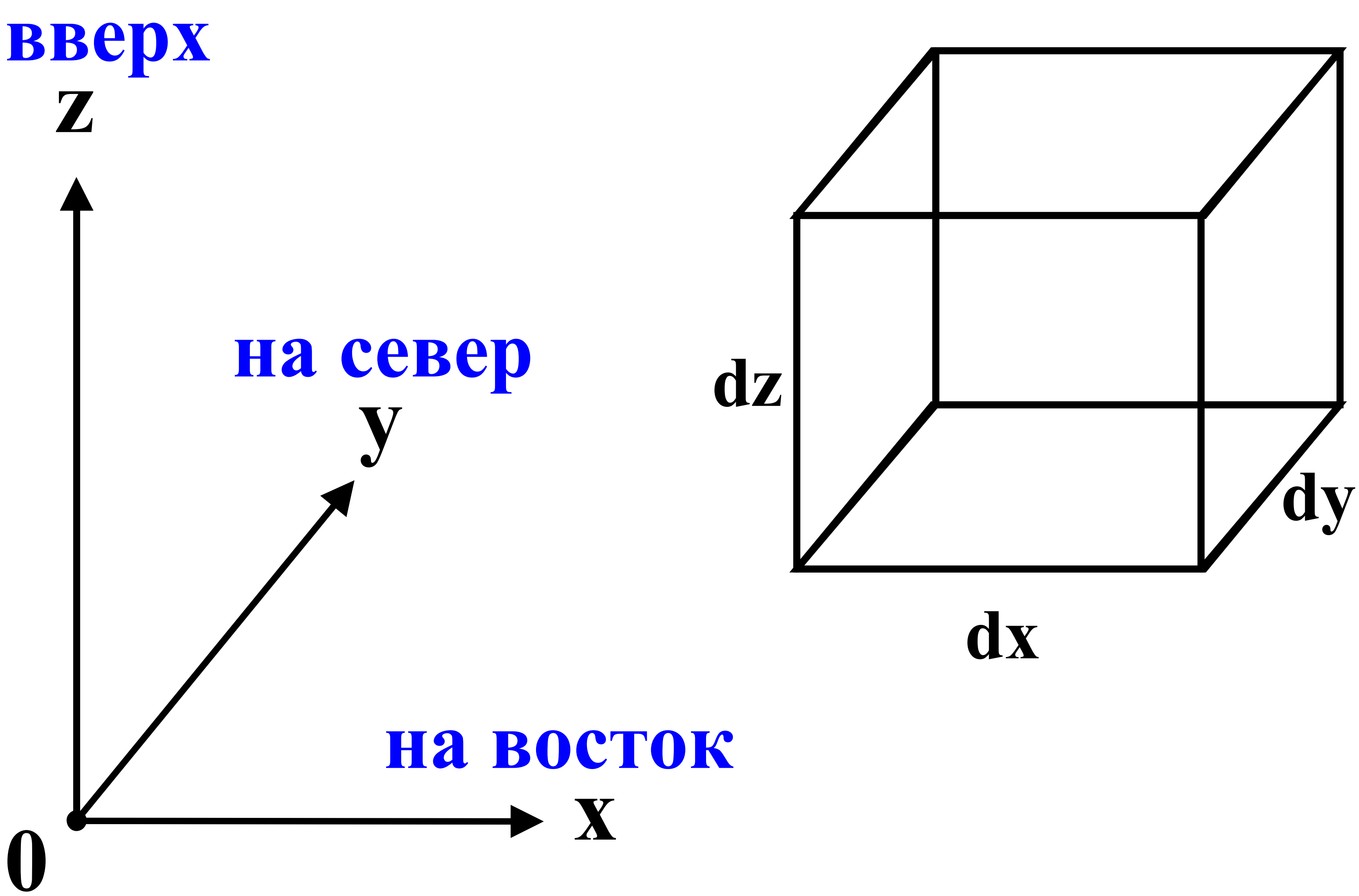
$$\vec{v} = \left(u_x, u_y, u_z\right)$$

$$\vec{v} \equiv \left(u, v, w\right)$$

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$$

$$p = p(x, y, z, t)$$

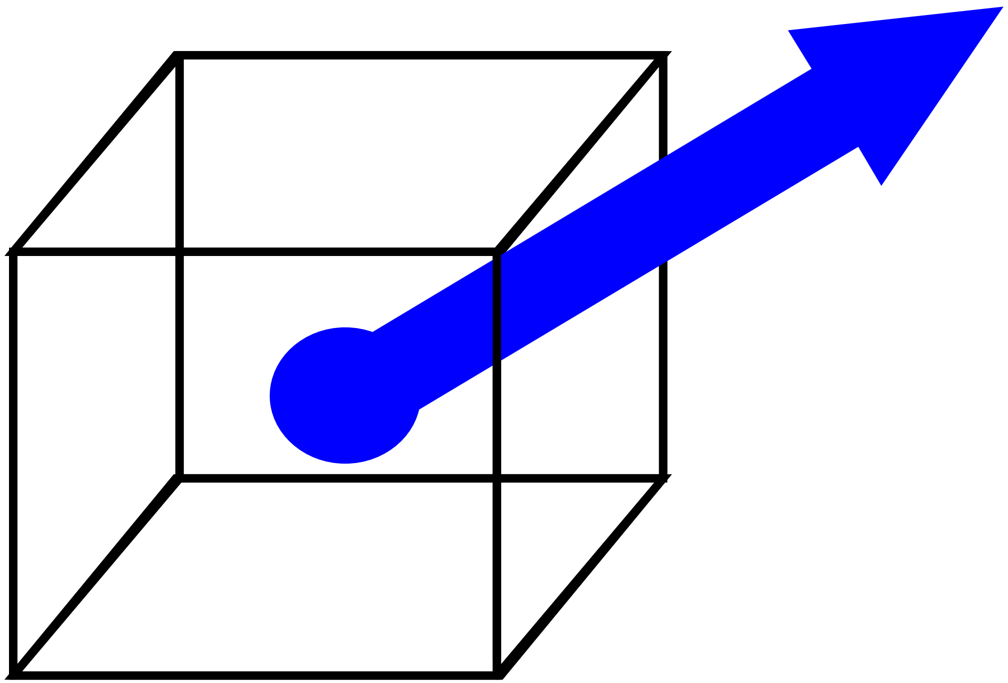
$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$



вверх
z
на север
y
на восток
x
0
dz
dy
dx

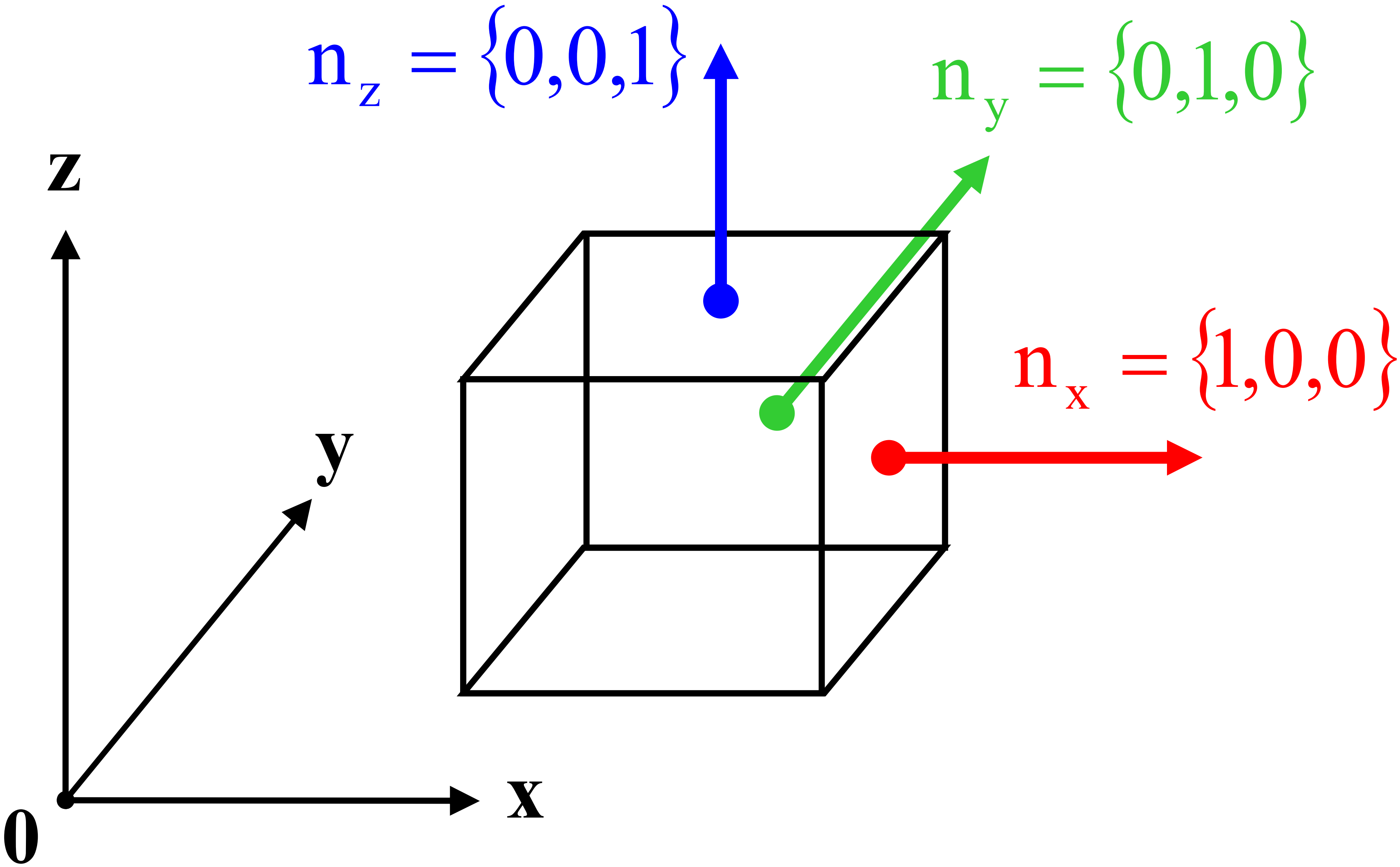
Массовые силы

$$F_{масс} \sim dm = dx\,dy\,dz\,\rho$$



- сила притяжения (Земля, Луна, Солнце, …)
- силы инерции (Кориолиса, центробежная)

«Поверхностные» силы

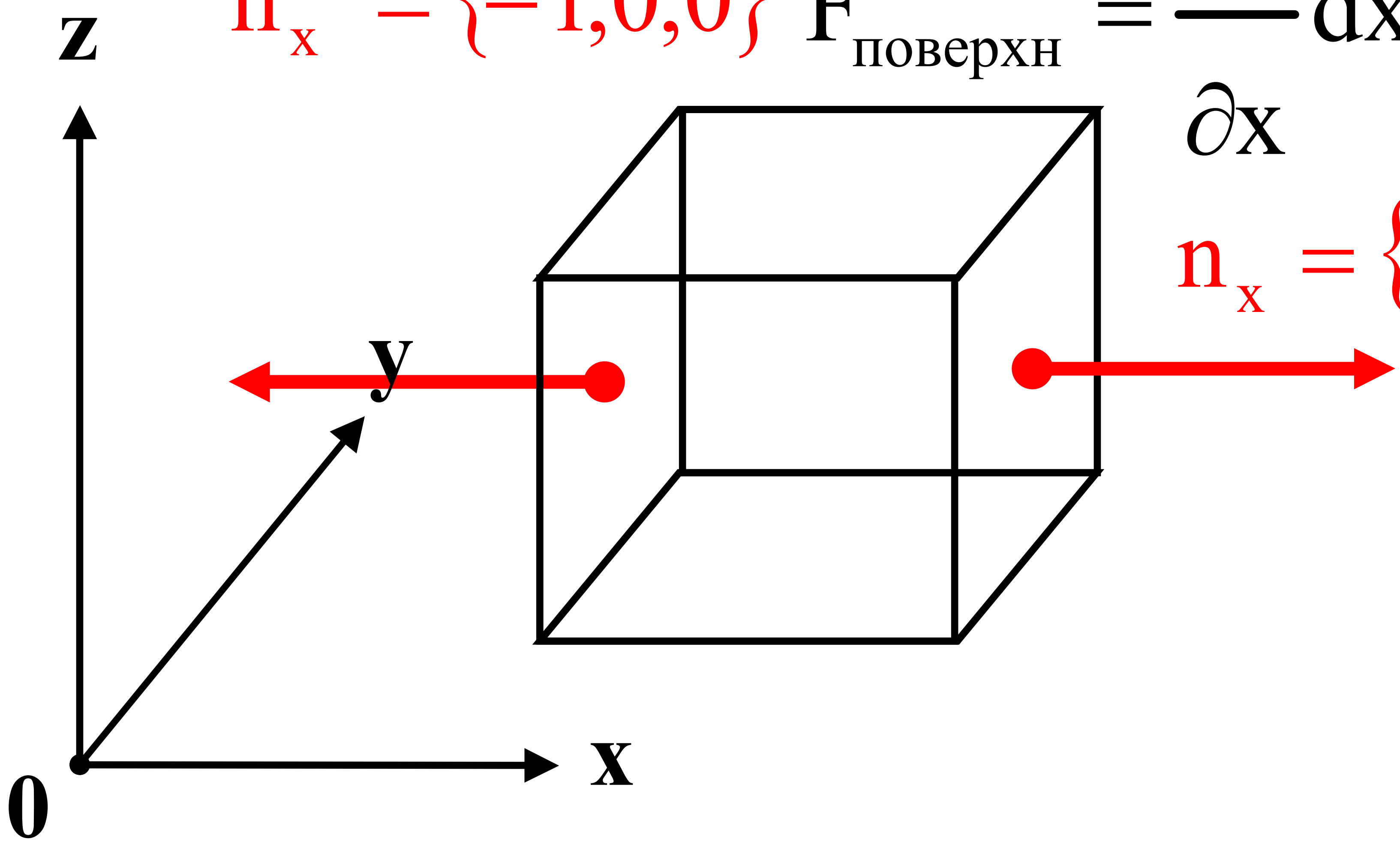


«Поверхностные» силы

$$F_{поверхн} = \left[\tau(x+dx) - \tau(x)\right] dydz$$

$$n_x' = \{-1,0,0\} \quad F_{поверхн} = \frac{\partial \tau}{\partial x} dxdydz$$

$$n_x = \{1,0,0\}$$



$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{масс}} + \sum \vec{F}_{\text{поверхн}}$$

$$\boxed{dx\ dy\ dz\ \rho}$$

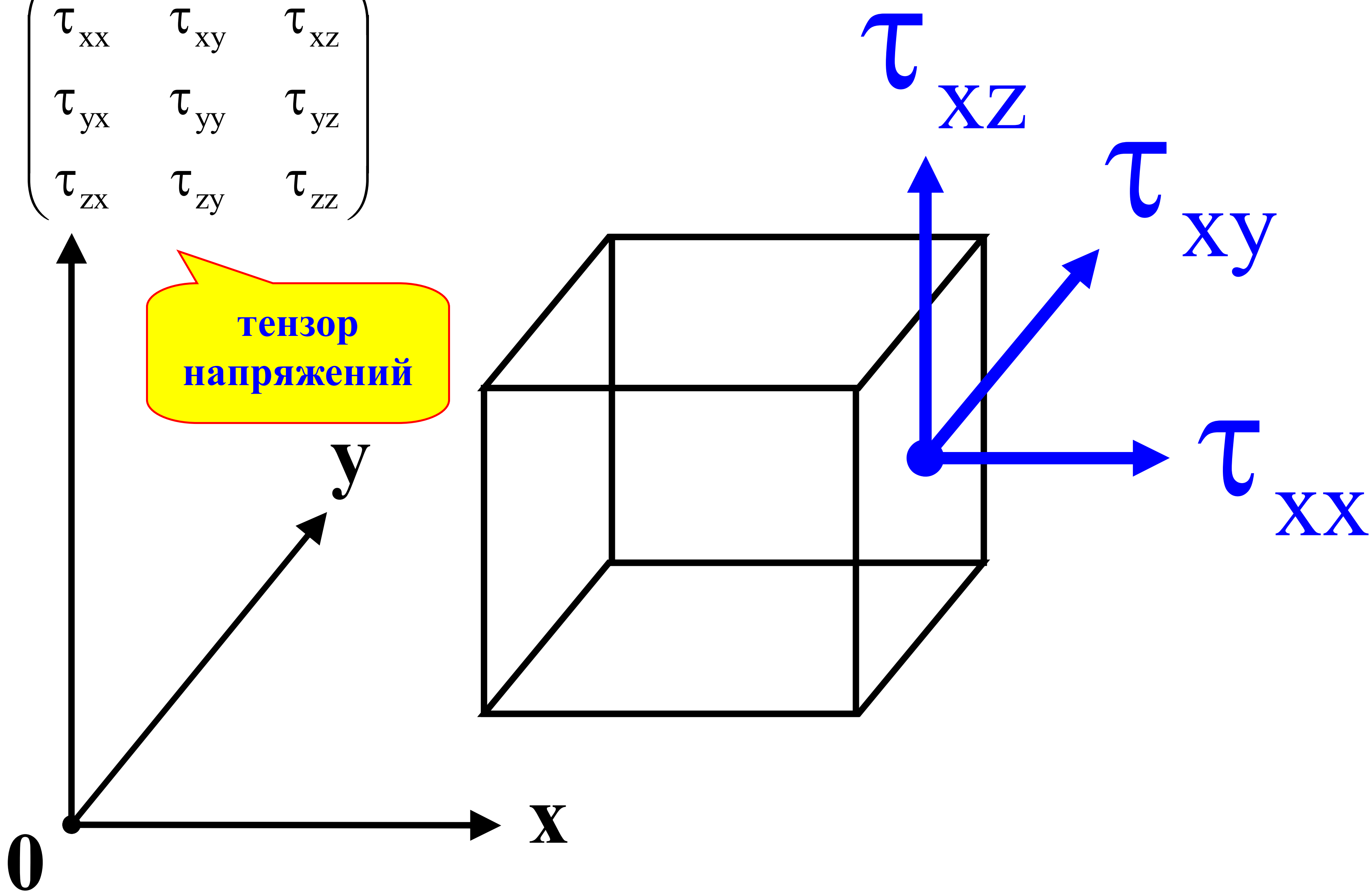
$$\boxed{\sim dx\ dy\ dz\ \rho}$$

$$\boxed{"\frac{\partial \tau}{\partial x}"\, dxdydz}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right] + \frac{1}{\rho}\,"\frac{\partial \tau}{\partial x}"$$

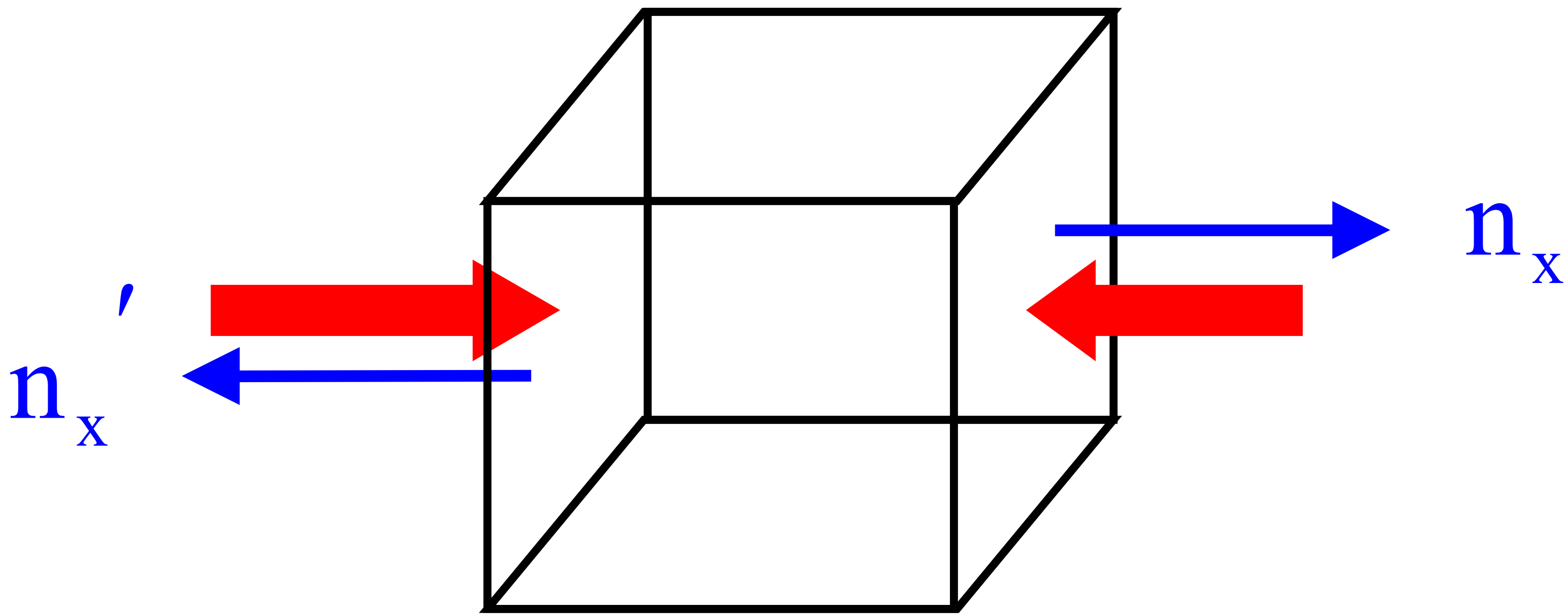
«Поверхностные» силы

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$



Сила градиента давления

$$p(x, y, z)\,dy\,dz$$



$$p(x + dx, y, z)\,dy\,dz$$

напряжение действует в направлении противоположном нормали!

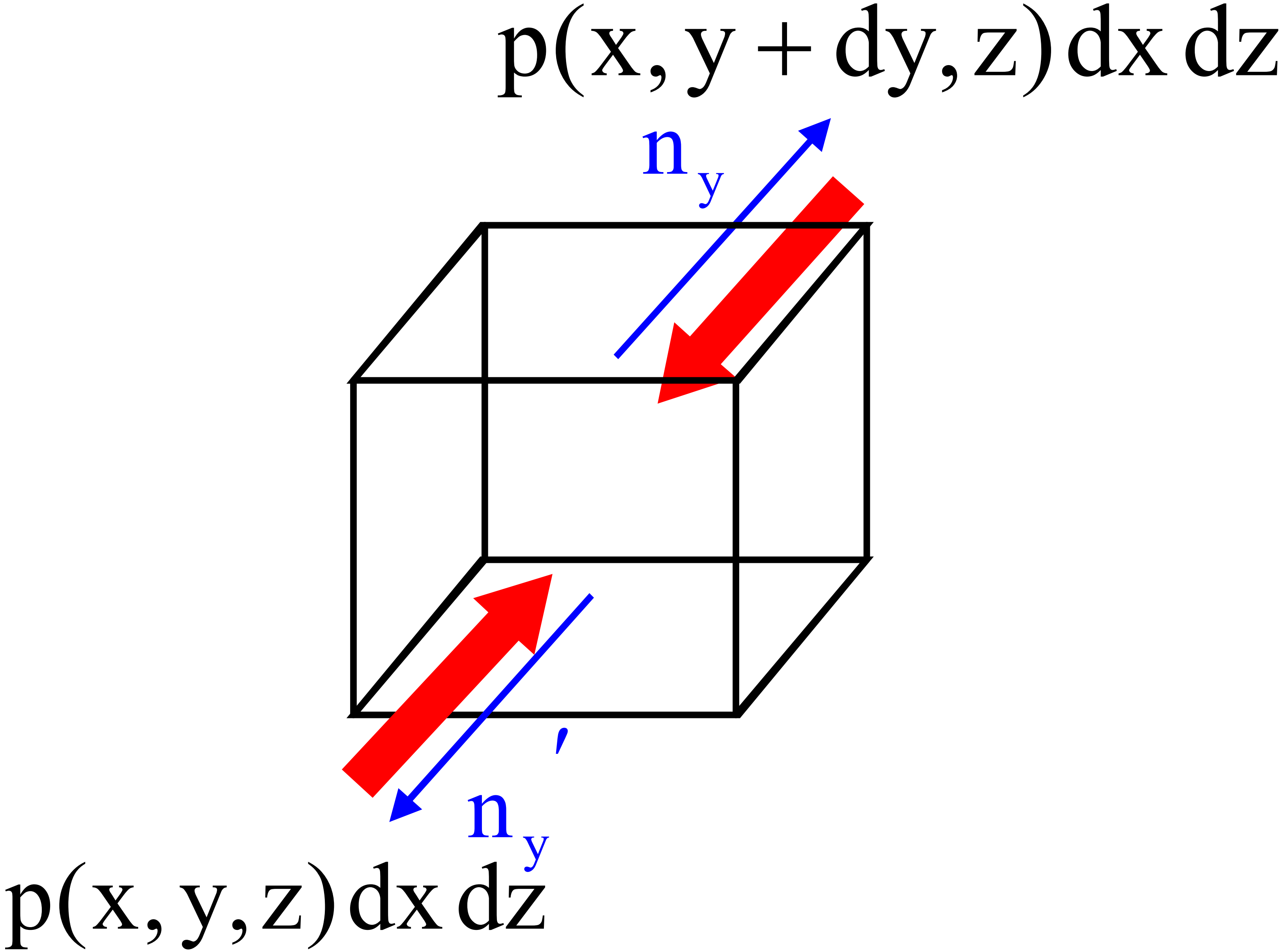
Сила градиента давления
(x - компонента)

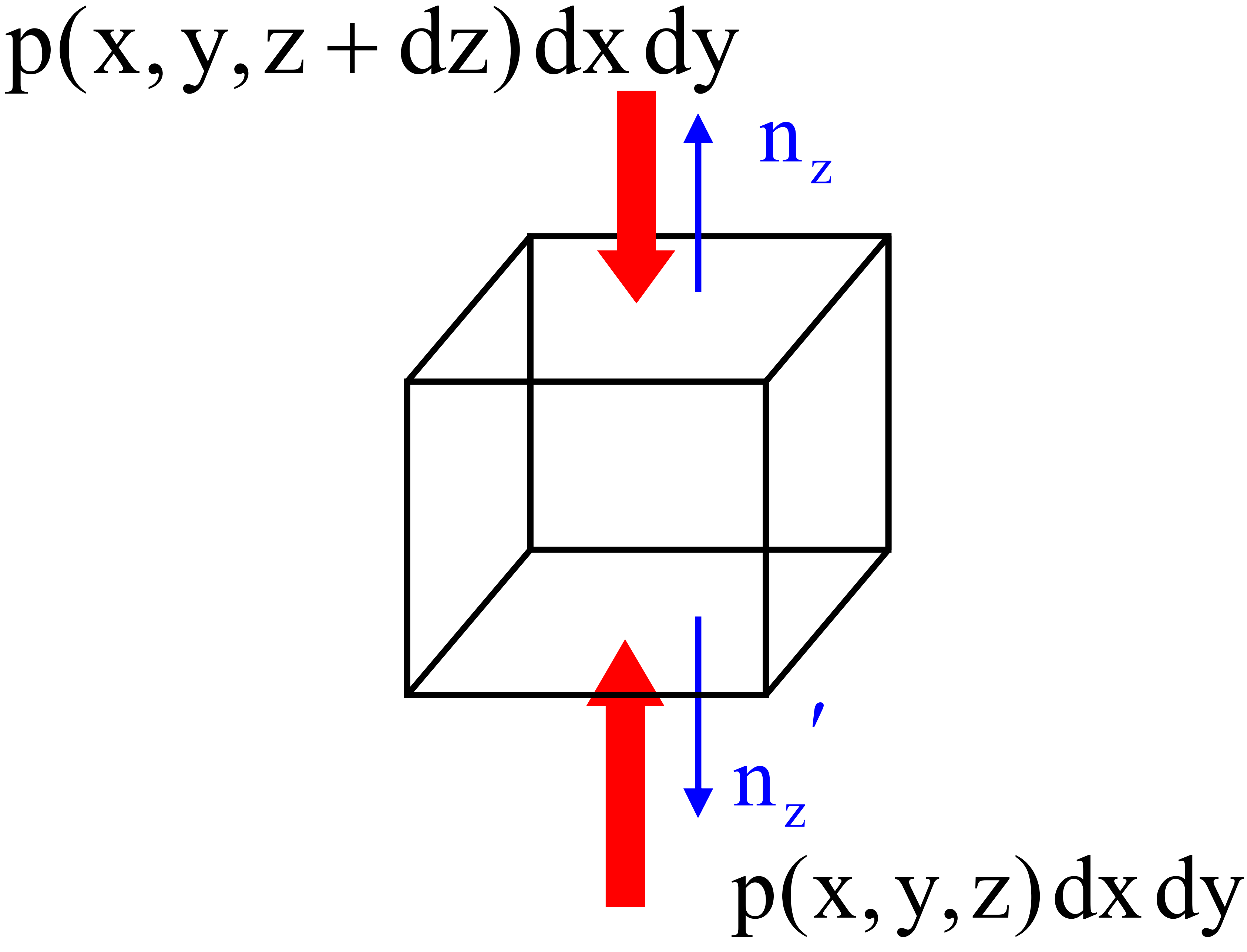
$$\left[p(x,y,z) - p(x+dx,y,z)\right]dy\,dz =$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x}dx\,dy\,dz$$

$$\underbrace{dx\,dy\,dz\,\rho}_{dm}\,a_x = -\frac{\partial p}{\partial x}dx\,dy\,dz$$

$$a_x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$


$p(x, y + dy, z)\,dx\,dz$
n_y
n_y'
$p(x, y, z)\,dx\,dz$



$p(x, y, z + dz)\,dx\,dy$
n_z
n_z'
$p(x, y, z)\,dx\,dy$

Сила градиента давления

$$a_x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\vec{F}^{\mathrm{grad}\,p} = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p$$

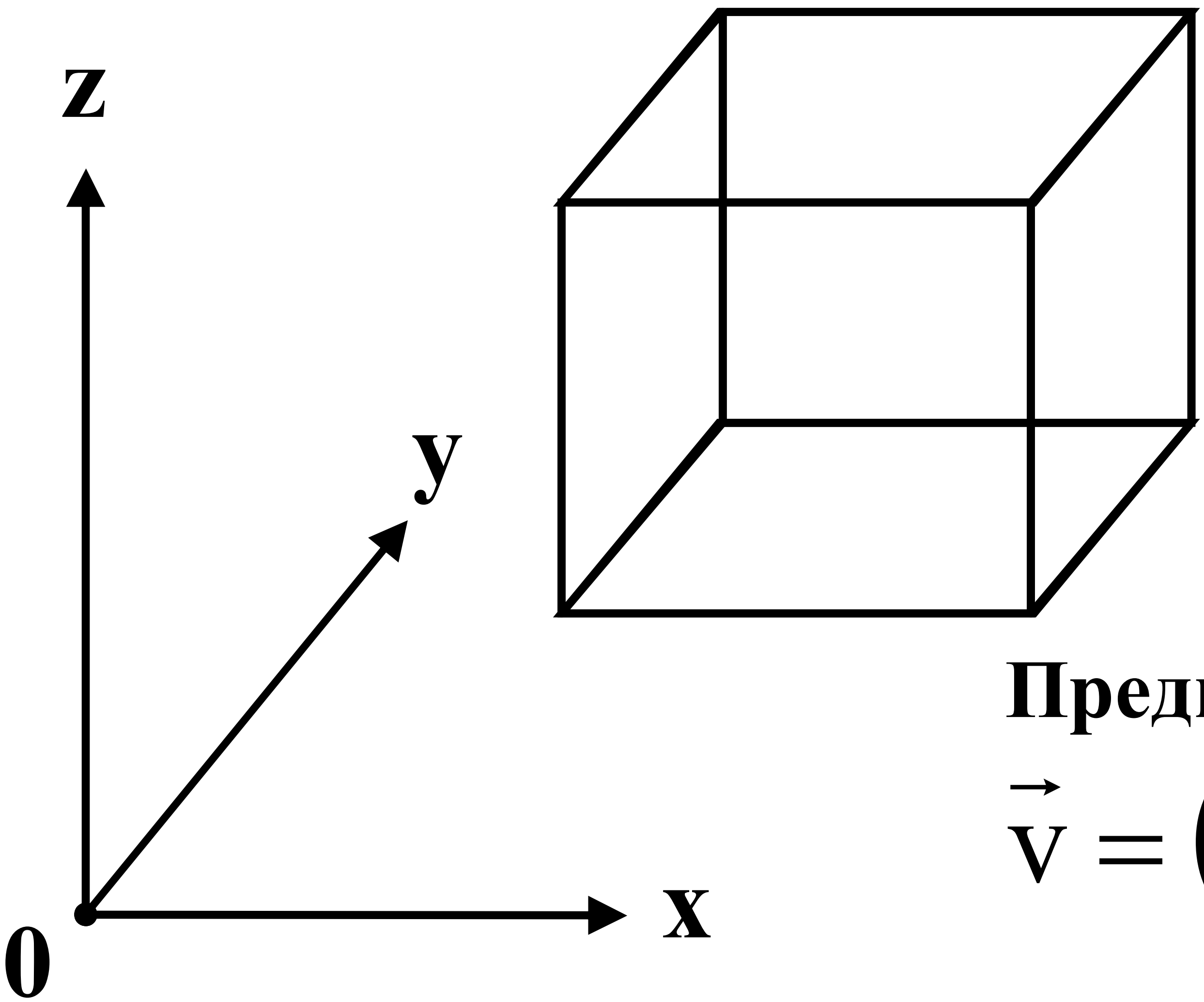
$$a_y = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\vec{F}^{\mathrm{grad}\,p} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\,p$$

$$a_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \equiv \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$$

Сила вязкого трения



Предположим, что

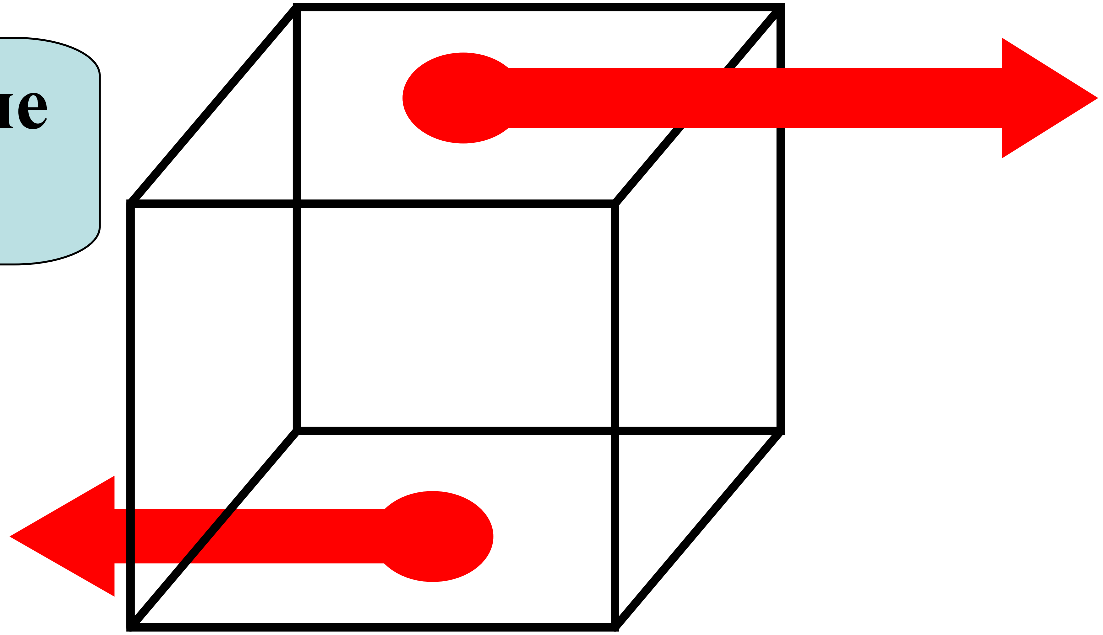
$$\vec{v} = \left(u(z), 0, 0\right)$$

$$\tau_{xz} = \eta \frac{\partial u}{\partial z}$$

напряжение трения

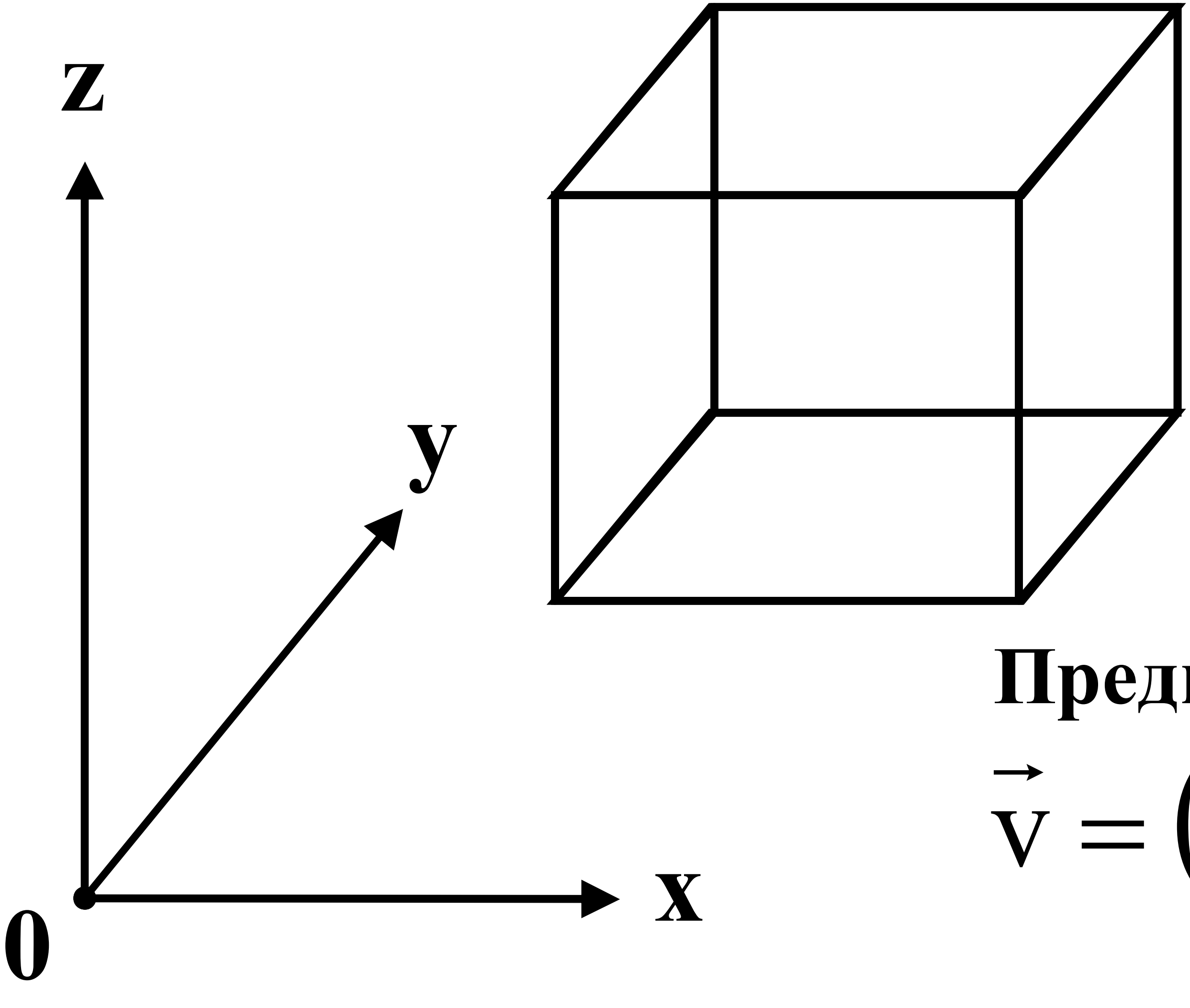
динамическая вязкость

$$\left(\eta \frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z+dz} dx\,dy$$



$$\left(\eta \frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z} dx\,dy$$

Сила вязкого трения

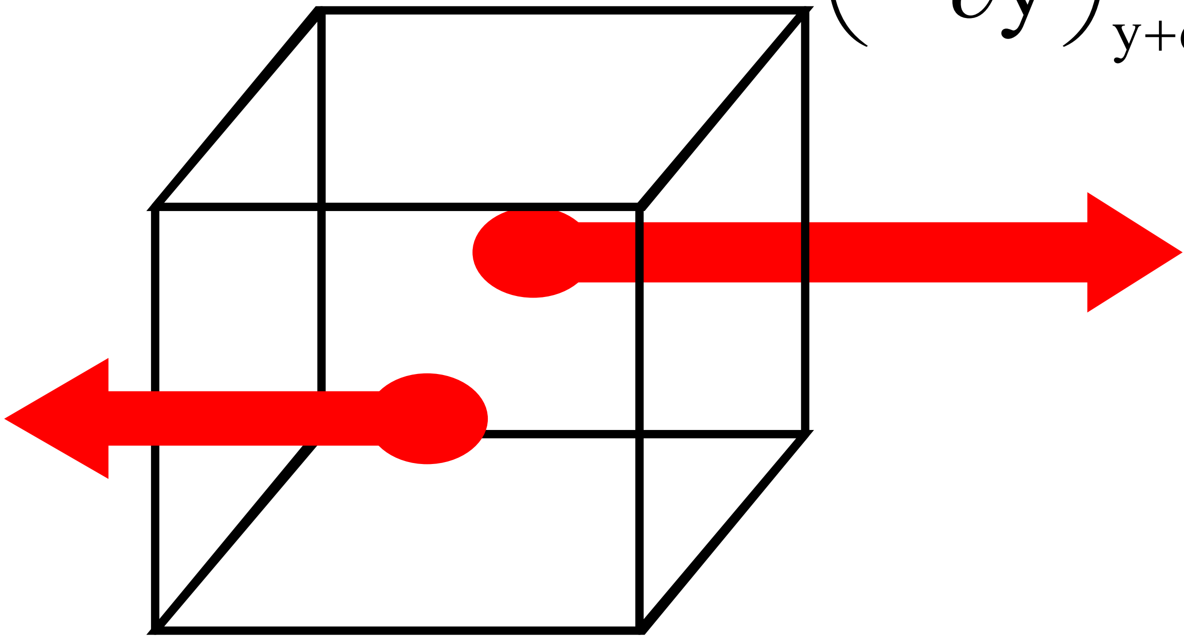


Предположим, что

$$\vec{v} = \left(u(y), 0, 0\right)$$

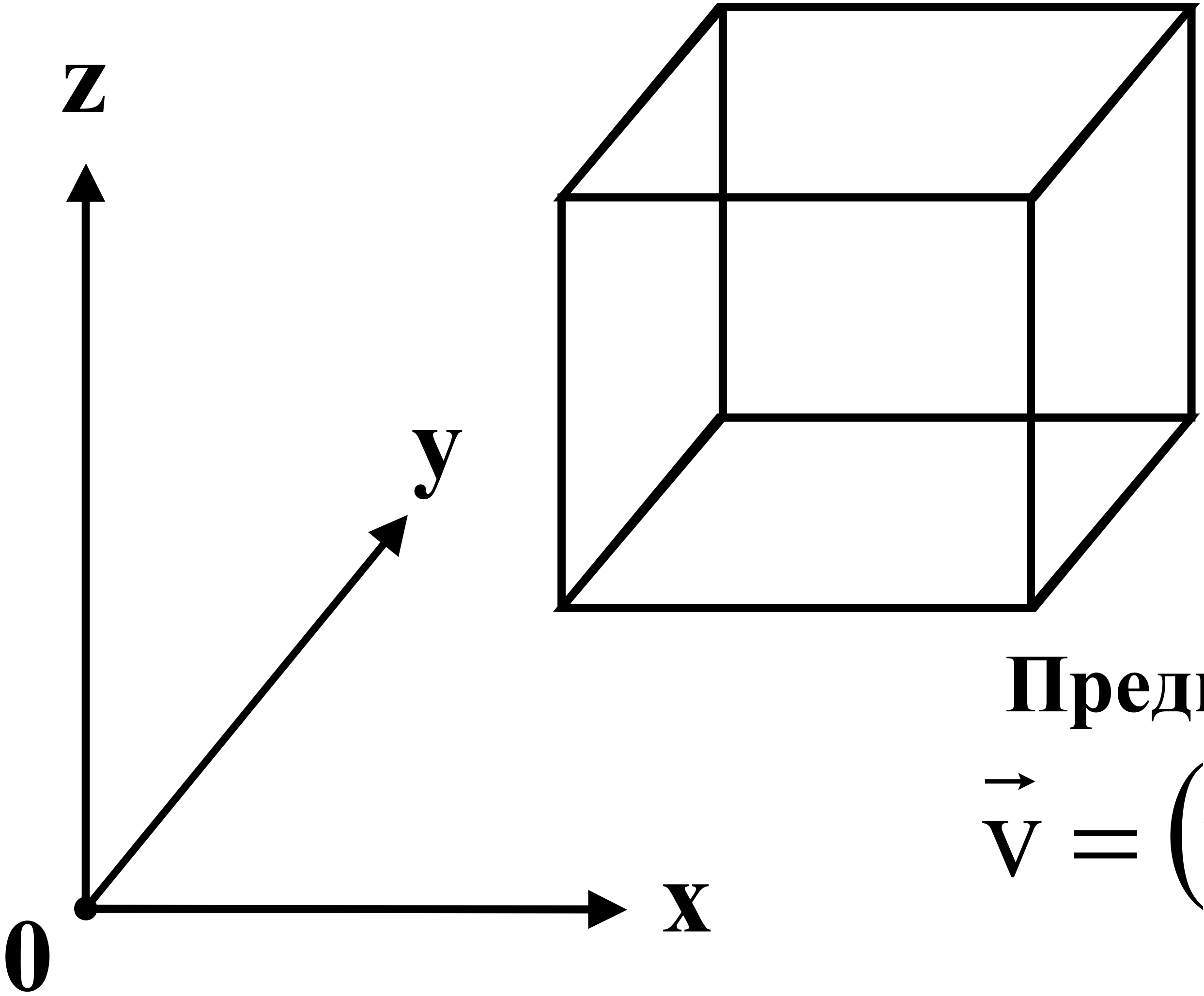
$$\tau_{xy} = \eta \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y+dy} dx\, dz$$



$$\left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y} dx\, dz$$

Сила вязкого трения

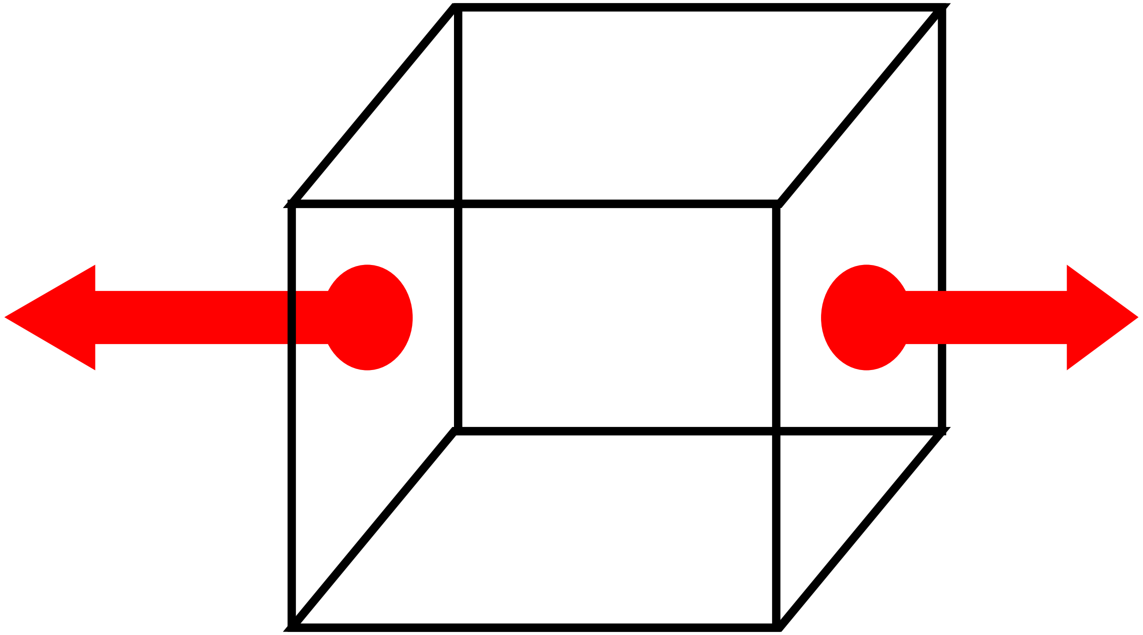


Предположим, что

$$\vec{v} = \left(u(x), v, w \right)$$

$$\tau_{xx} = \eta \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\left(\eta \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+dx} dy\,dz$$



$$\left(\eta \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x} dy\,dz$$

Сила вязкого трения

$$F_x^{\text{вязк.трения}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Для несжимаемой жидкости!!!

$$F_x^{\text{вязк.трения}} = \frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \frac{\eta}{\rho}\Delta u = \nu\Delta u$$

кинематическая вязкость

Вторая вязкость

Для сжимаемой жидкости!!!

$$\vec{F}^{\text{вязк.трения}} = \nu\Delta\vec{v} + \left(\zeta + \frac{\nu}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}$$

	η, кг/с·м	ν, м^2/с
вода	10^{-3}	10^{-6}
воздух	$2 \cdot 10^{-5}$	$15 \cdot 10^{-6}$

$$\nu_{\text{глицерин}} \approx 680 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$$

$$\nu_{\text{мантии}} \approx 10^{17} \text{ м}^2/\text{с}$$

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{масс} + \sum \vec{F}_{поверхн}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right] - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\nu}{3}\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}$$

сила тяжести

сила Кориолиса

сила градиента давления

сила вязкого трения

$$\vec{v} = \vec{v}\big(x(t), y(t), z(t), t\big)$$

материальная производная

полная производная

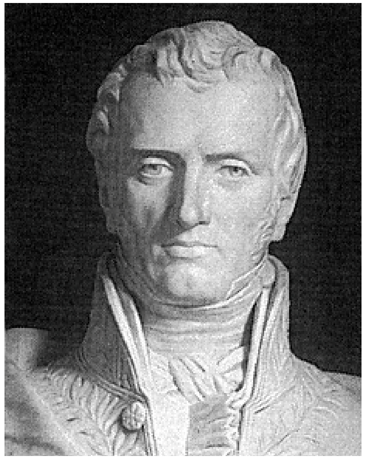
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v}$$

субстациональная производная

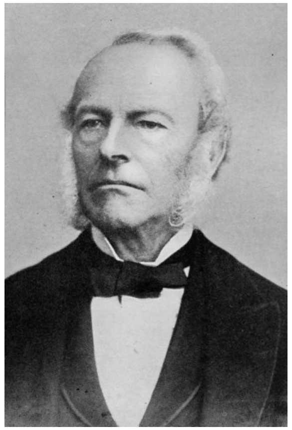
$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + 2\left[\vec{v}\times\vec{\omega}\right] - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nu\Delta\vec{v} + \left(\zeta + \frac{\nu}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}$$



Анри Навье
1785-1836
французский
механик и инженер



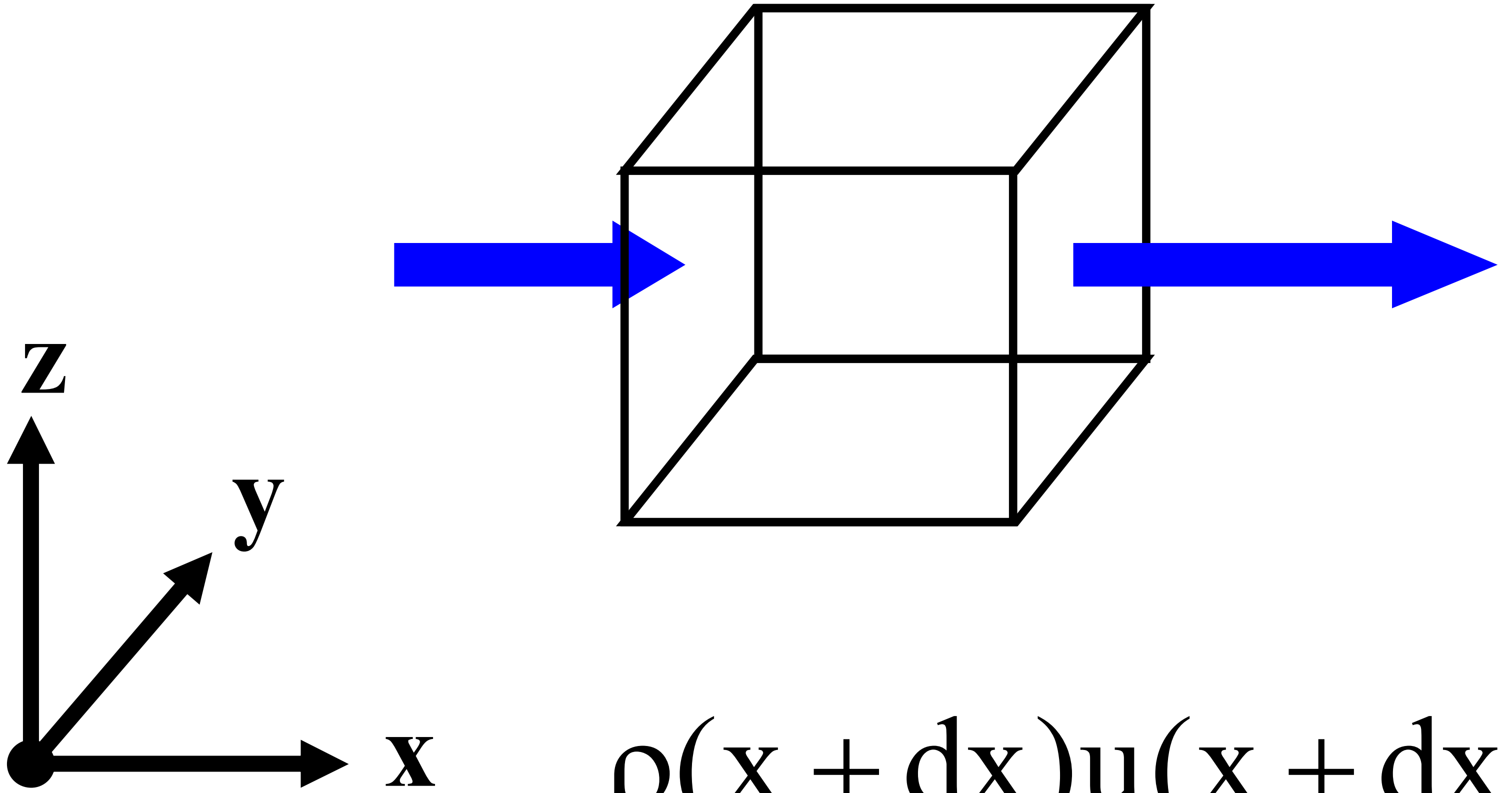
Джордж Стокс
1819-1903
английский физик и
математик

уравнение Навье-Стокса

3 уравнения и 5 неизвестных функций

Уравнение неразрывности (закон сохранения массы)

$$\rho(x)u(x)dydz$$



$$\rho(x+dx)u(x+dx)dydz$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = dxdydz\frac{\partial \rho}{\partial t} =$$

$$= -\left[\rho(x+dx)u(x+dx) - \rho(x)u(x)\right]dydz$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial[\rho u]}{\partial x} - \frac{\partial[\rho v]}{\partial y} - \frac{\partial[\rho w]}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left[\rho\vec{v}\right] = 0$$

уравнение неразрывности

Система уравнений гидродинамики (аэрогидромеханики)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right] - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\nu}{3}\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho \vec{v}\right) = 0$$

уравнение Навье-Стокса

уравнение неразрывности

5 уравнений

5 неизвестных функций

$$\rho = \rho(p)$$

уравнение состояния

Система уравнений гидродинамики
+уравнение переноса температуры
+уравнение переноса соли/водяного пара

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)T = \chi \Delta T$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)s = \vartheta \Delta s$$

$$\rho = \rho(p, T, s)$$

система остается замкнутой!!!

Граничные условия на поверхностях, ограничивающих область решения задачи

условие прилипания

$$\vec{v} = 0 \quad \text{или} \quad \vec{v} = \vec{v}_0$$

заданное напряжение (поток импульса)

$$\eta \frac{\partial u}{\partial z} = \tau$$

заданное давление

$$p = p_0$$

заданный поток тепла

$$-C\rho\chi \frac{\partial T}{\partial z} = Q$$

заданная температура

$$T = T_0$$

Граничные условия на поверхностях, ограничивающих область решения задачи

Поверхности могут быть подвижными и неизвестными, т.е. их положение определяется из решения задачи

Примеры:

- волны на поверхности воды
- течения с возможностью фазовых переходов (лед-вода, мантия-ядро Земли)
- размыв или выветривание
- etc.

Начальные условия (при t=0)

$$\vec{v} = \vec{v}_0(x, y, z)$$

$$p = p_0(x, y, z)$$

$$T = T_0(x, y, z)$$

$$s = s_0(x, y, z)$$

«высокая» теория

геофизическая практика

Проблема ассимиляции данных наблюдений в численные модели

Основные подходы к упрощению уравнений гидродинамики

Приближение №1:
«среда с постоянной плотностью (в.т.ч. несжимаемая)»

$$\boxed{\rho = \rho_0 = \mathrm{const}}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right] + \nu \Delta \vec{v} + \cancel{\left(\zeta + \frac{\nu}{3}\right) \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{v}}$$

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \mathrm{div}\left(\rho\,\vec{v}\right) = 0$$

$$\rho = \rho(p)$$

$$\rho_0$$

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$$

Приближение №1:
«среда с постоянной плотностью»

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + \vec{g} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right] + \nu \Delta \vec{v}$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

В крупномасштабных течениях атмосферы и океана H << L
$\Rightarrow \quad w_{верт} \ll u_{гориз}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{u_{гориз}}{L}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} \sim \frac{w_{верт}}{H}$$

$$\left|w_{верт}\right| \sim \frac{H}{L}\left|u_{гориз}\right|$$

Приближение №2:
«стационарное течение»

$$\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right] + \nu \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\nu}{3}\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}$$

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \operatorname{div}\left(\rho\, \vec{v}\right) = 0$$

$$\rho = \rho(p)$$

Приближение №3:
«идеальная (невязкая) жидкость»

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right] + \cancel{\nu \Delta \vec{v}} + \cancel{\left(\zeta + \frac{\nu}{3}\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}}$$

понижается порядок уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho \vec{v}\right) = 0$$

$$\rho = \rho(p)$$

Изменение граничного условия:

«прилипание» → «непротекание»

$\{v_\tau = 0, v_n = 0\} \rightarrow \{v_n = 0\}$

Приближение №4:
«идеальная жидкость постоянной плотности, линейное приближение»

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \cancel{\left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v}} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + \vec{g} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right]$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

если $\left\{ \begin{matrix} \vec{v}_1, p_1 \\ \vec{v}_2, p_2 \end{matrix} \right\}$ – решения системы, то $\Rightarrow$

$A\vec{v}_1 + B\vec{v}_2, Ap_1 + Bp_2$ – решения системы

где A, B – константы

«Геофизические» приближения:

1. Гидростатическое приближение

2. Геострофическое приближение

strophe (греч.) – вращение, поворот

Крупномасштабные течения атмосферы и океана обычно происходят в условиях гидростатического (по вертикали) и геострофического (по горизонтали) баланса

$$z: -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} = 0 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}: -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right] = 0$$

«Геофизические» приближения:

1. Гидростатическое приближение

$$\cancel{\frac{dw}{dt}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\rho = \rho_0 = \mathrm{const} \\ &g = \mathrm{const} \end{aligned}}$$

$$\left|w_{\text{верт}}\right| \sim \frac{H}{L}\left|u_{\text{гориз}}\right|$$

$$H << L$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \;\Rightarrow p(z) = p_0 - \rho_0 g\, z$$

«Геофизические» приближения:

1. Гидростатическое приближение

2. Геострофическое приближение

strophe (греч.) – вращение, поворот

Крупномасштабные течения атмосферы и океана обычно происходят в условиях гидростатического (по вертикали) и геострофического (по горизонтали) баланса

$$z: -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} = 0 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}: -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right] = 0$$

«Геофизические» приближения:

2. Геострофическое приближение

$$\cancel{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}}+\cancel{\left(\vec{v},\vec{\nabla}\right)\vec{v}}=-\frac{\vec{\nabla}p}{\rho_0}+\cancel{\vec{g}}+2\left[\vec{v}\times\vec{\omega}\right]$$

$$\operatorname{div}\left(\vec{v}\right)=0$$

по
горизонтали
не действует!