Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах

(Введение в физику моря и вод суши)

2021 Лекция №6

Носов Михаил Александрович

отделение геофизики, физический факультет МГУ

«Геофизические» приближения:

1. Гидростатическое приближение

2. Геострофическое приближение

strophe **(греч.) – вращение, поворот**

Крупномасштабные течения атмосферы и океана обычно происходят в условиях гидростатического (по вертикали) и геострофического (по горизонтали) баланса

$$z: -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} = 0 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}: -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right] = 0$$

«Геофизические» приближения:

2. Геострофическое приближение

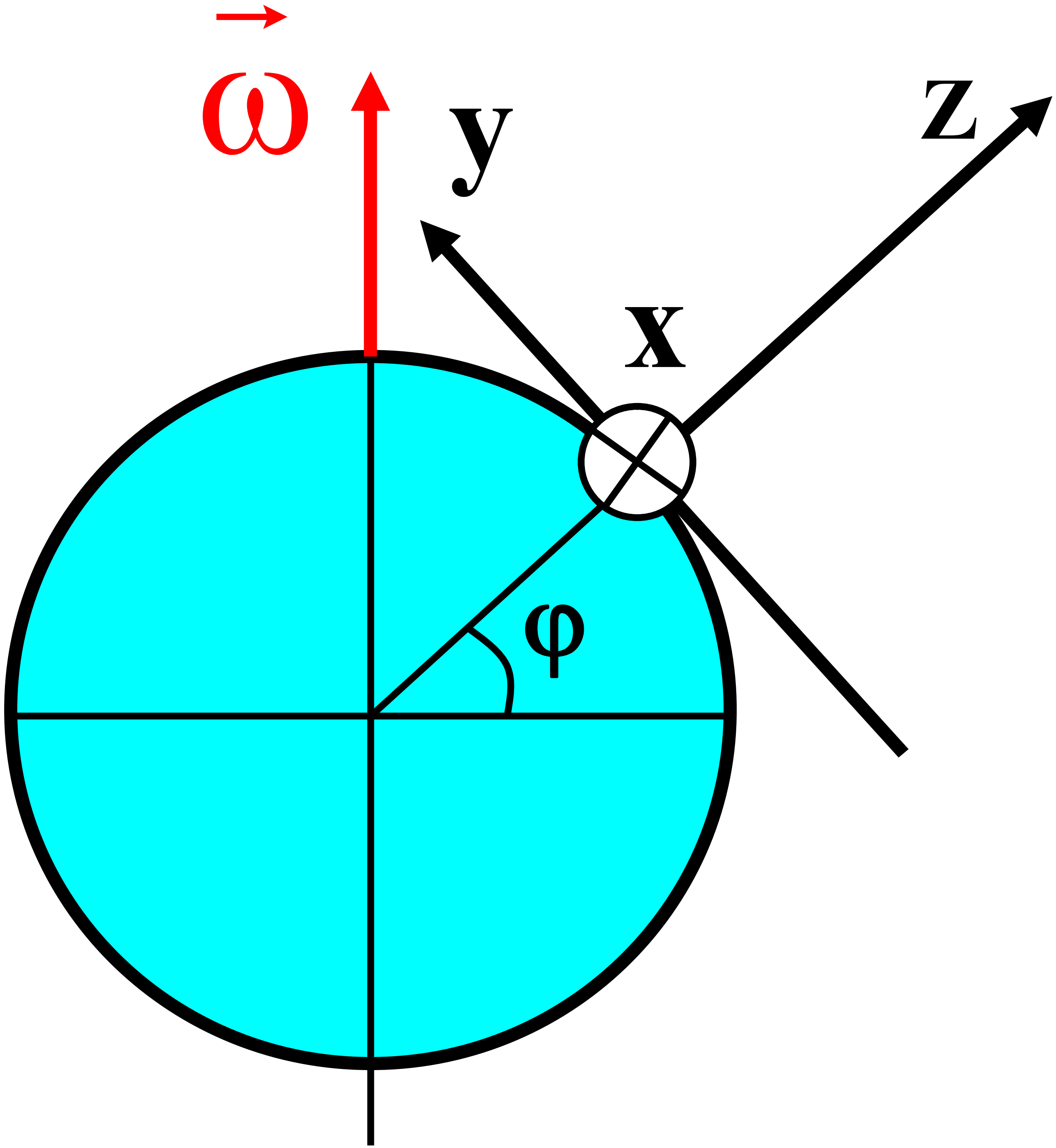
$$\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + \cancel{\left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v}} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + \cancel{\vec{g}} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right]$$

$$\operatorname{div}\left(\vec{v}\right) = 0$$

по горизонтали не действует!

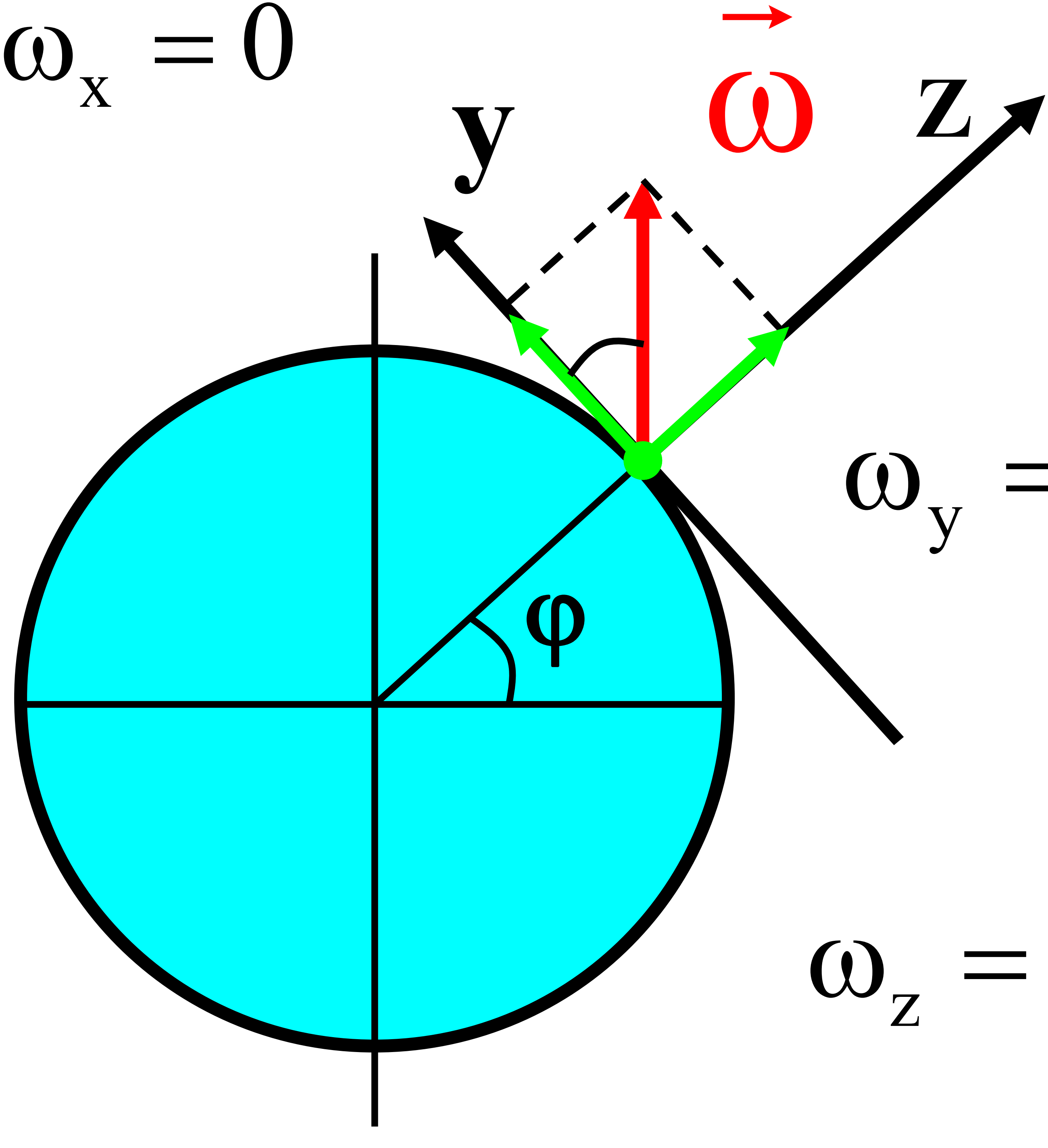
Gaspard-Gustave de Coriolis
French, Mathematics, Physics
1792-1843

$$F_{Кор} = 2m\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right]$$



$\vec{\omega}$
y
Z
x
φ

$$\omega_x = 0$$



$$\omega_y = \omega \cos \varphi$$

$$\omega_z = \omega \sin \varphi$$

$$\vec{v} = (u, v, w)$$

$$\boxed{1.\ w << \{u, v\}} \quad \boxed{2.\ F_z^{\text{Кор}} = 0}$$

$$\vec{\omega} = \left(0, \omega\cos\varphi, \ \omega\sin\varphi\right)$$

$$2\left[\vec{v}\times\vec{\omega}\right] = 2\begin{vmatrix} i & j & k \\ u & v & w \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} = 2\begin{pmatrix} v\omega_z - w\omega_y \\ w\omega_x - u\omega_z \\ u\omega_y - v\omega_x \end{pmatrix} =$$

традиционное приближение

$$= 2\begin{pmatrix} v\omega\sin\varphi - w\omega\cos\varphi \\ -u\omega\sin\varphi \\ u\omega\cos\varphi \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2v\omega\sin\varphi \\ -2u\omega\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2\left[\vec{v}\times\vec{\omega}\right]\approx\begin{pmatrix} 2v\omega\sin\varphi \\ -2u\omega\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f\,v \\ -f\,u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f = 2\omega\sin\varphi$$

параметр Кориолиса

Масштаб времени течения

$$\tau = \frac{L}{U}$$

Carl-Gustaf Rossby
Swedish-US meteorologist
1898-1957

Период вращения

$$T$$

Число Россби

$$\frac{T}{\tau} = \frac{T \cdot U}{L}$$

Число Россби

$$R_o = \frac{T \cdot U}{L}$$

Неподвижный (относительно Земли) бассейн

$$R_o = \frac{24 \cdot 60 \cdot 60[c] \times 0.01[м/c]}{0.3[м]} \approx 3000$$

эффекты вращения незначительны

Вращающийся бассейн

эффекты вращения существенны

$$R_o = \frac{3[c] \times 0.01[м/c]}{0.3[м]} = 0.1$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}]$$

$$\frac{U}{T} \sim \frac{U}{L/U}$$

геострофическое приближение работает при

$$R_o << 1$$

$$U \cdot f$$

$$f = 2\omega \sin\varphi$$

на экваторе

$R_o \to \infty$

число Россби

$$R_o = \frac{\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|}{\left|2[\vec{v} \times \vec{\omega}]\right|} \sim \frac{\frac{U}{L/U}}{U \cdot f} = \frac{U}{L \cdot f}$$

Оценка числа Россби для природных условий

$$\boxed{R_o = \frac{U}{L \cdot f}} \qquad f = 2\omega \sin\varphi = \frac{4\pi}{T}\sin\varphi \sim 10^{-4}\,\text{с}^{-1}$$

геострофическое приближение

сидерический период вращения Земли 23 ч 56 мин 4.0905 с

$$f_{max} \approx 1.458 \cdot 10^{-4}\,\text{с}^{-1}$$

хорошо работает

$$R_o = \frac{1[\text{м}/\text{с}]}{10^6[\text{м}] \times 10^{-4}[\text{с}^{-1}]} \approx 0.01$$

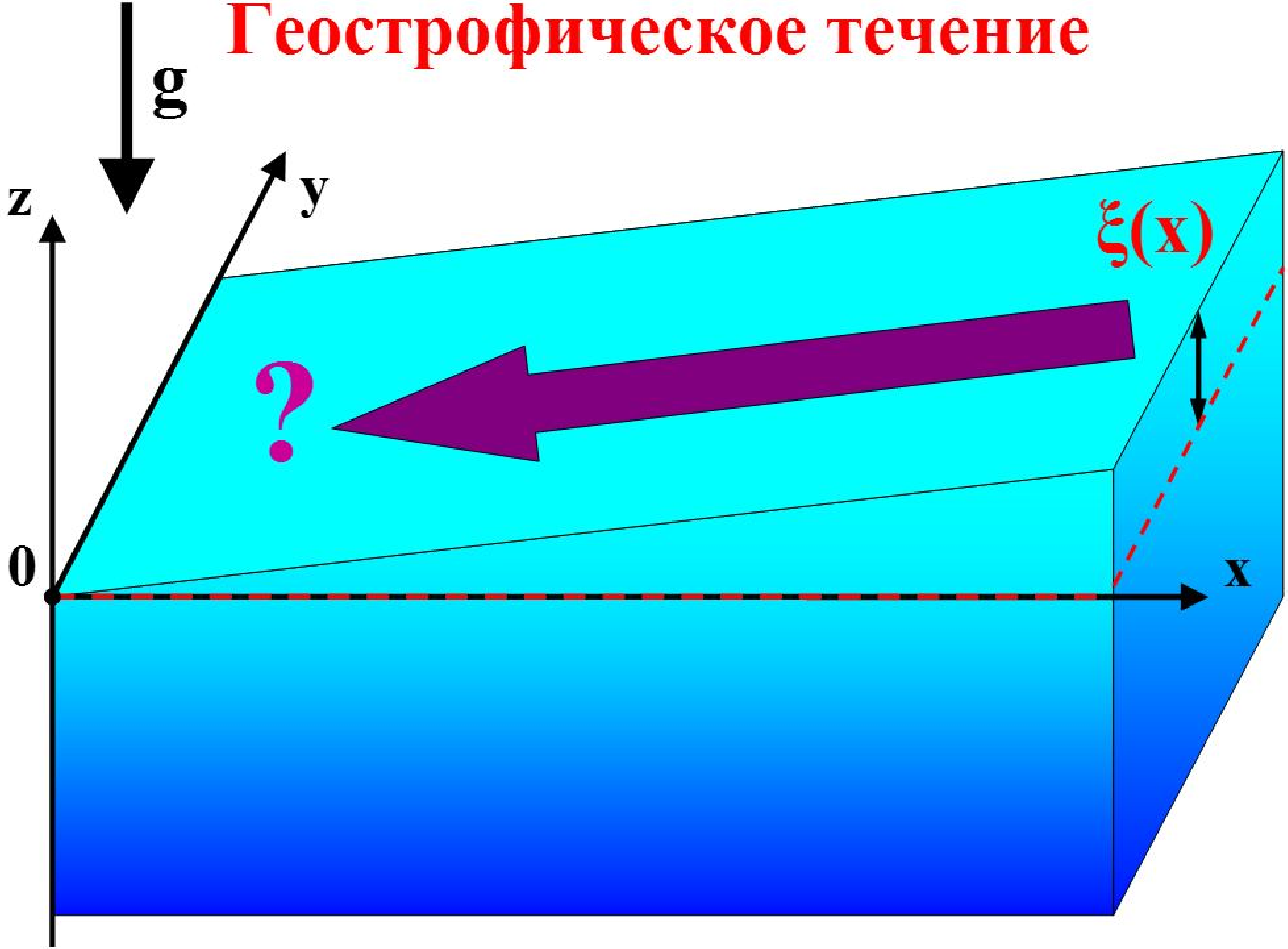
работает

$$R_o = \frac{1[\text{м}/\text{с}]}{10^5[\text{м}] \times 10^{-4}[\text{с}^{-1}]} \approx 0.1$$

плохо работает

$$R_o = \frac{1[\text{м}/\text{с}]}{10^4[\text{м}] \times 10^{-4}[\text{с}^{-1}]} \approx 1$$

Геострофическое течение



Геострофическое и гидростатическое приближения

$$x:\quad -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}+f\,v=0 \qquad f=2\omega\sin\varphi$$

$$\vec{v}=\left(u,v\right)$$

$$y:\quad -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y}-f\,u=0$$

$$\boxed{p=p_{\text{атм}}+\rho_0 g\left(\xi-z\right)}$$

$$z:\quad -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z}-g=0\;\Bigg|\int_z^{\xi}dz$$

$$x: \quad -g\frac{\partial \xi}{\partial x} + f\,v = 0$$

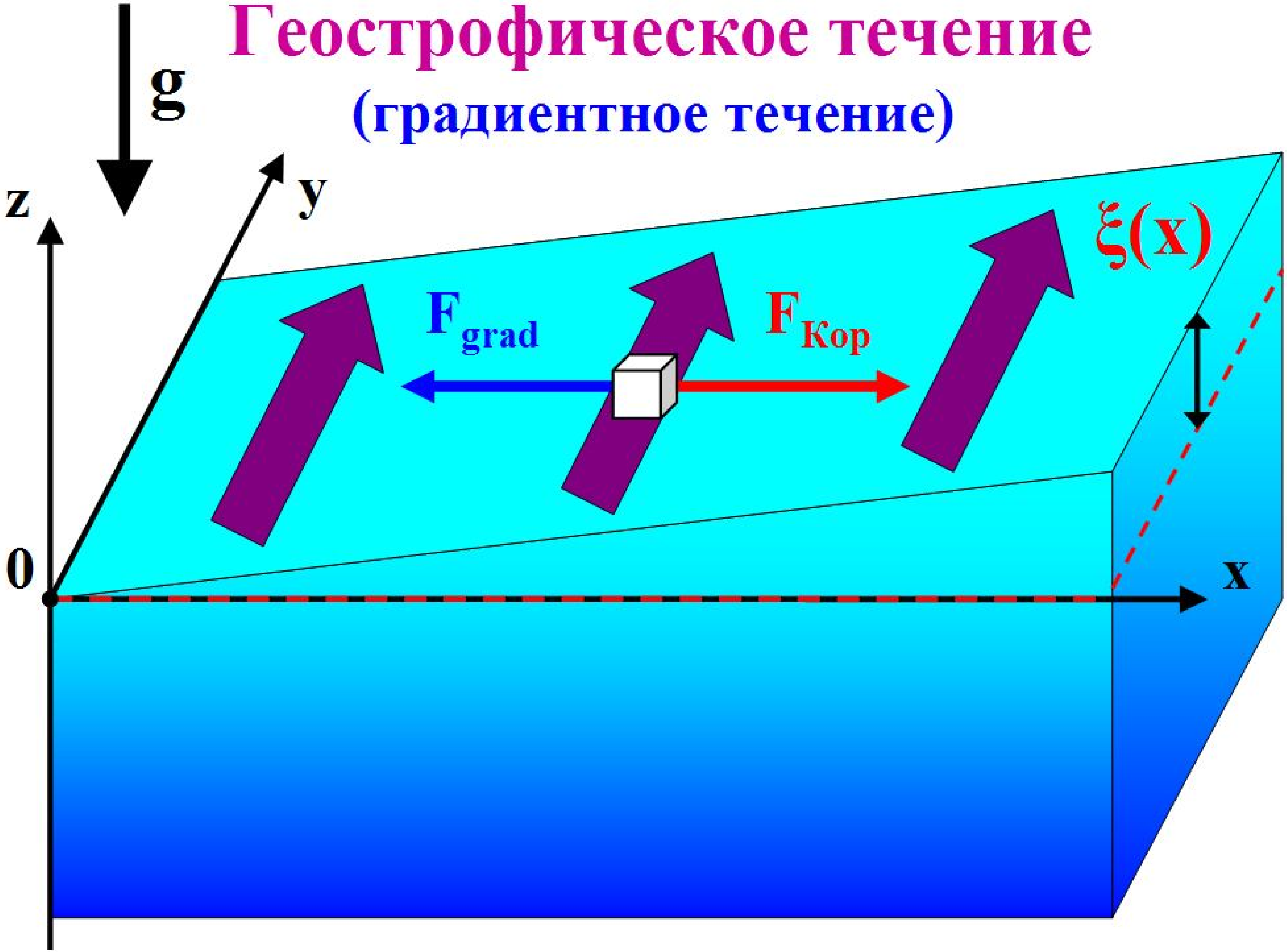
$$\xi = \xi(x)$$

$$y: \quad -g\underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial y}}_{=0} - f\,\underbrace{u}_{=0} = 0$$

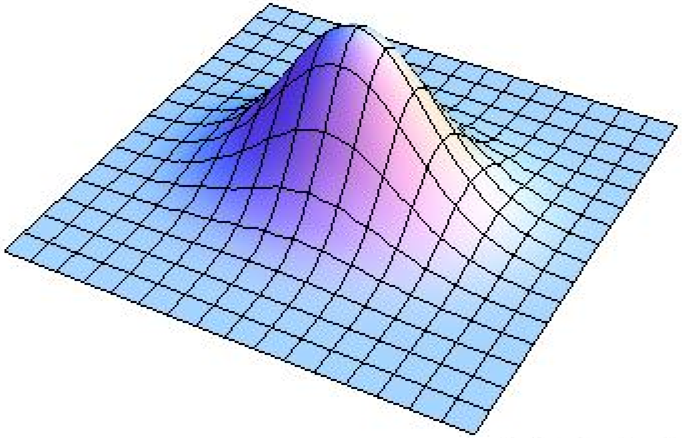
$$\boxed{\begin{aligned} x: &\quad u = 0 \\ y: &\quad v = \frac{g}{f}\frac{\partial \xi}{\partial x} \end{aligned}}$$

Геострофическое течение

(градиентное течение)



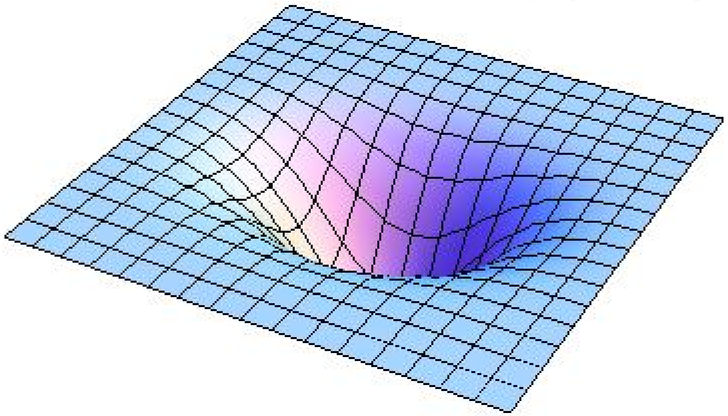
Геострофическое течение вблизи области **поднятия** уровня (Сев.полушарие)

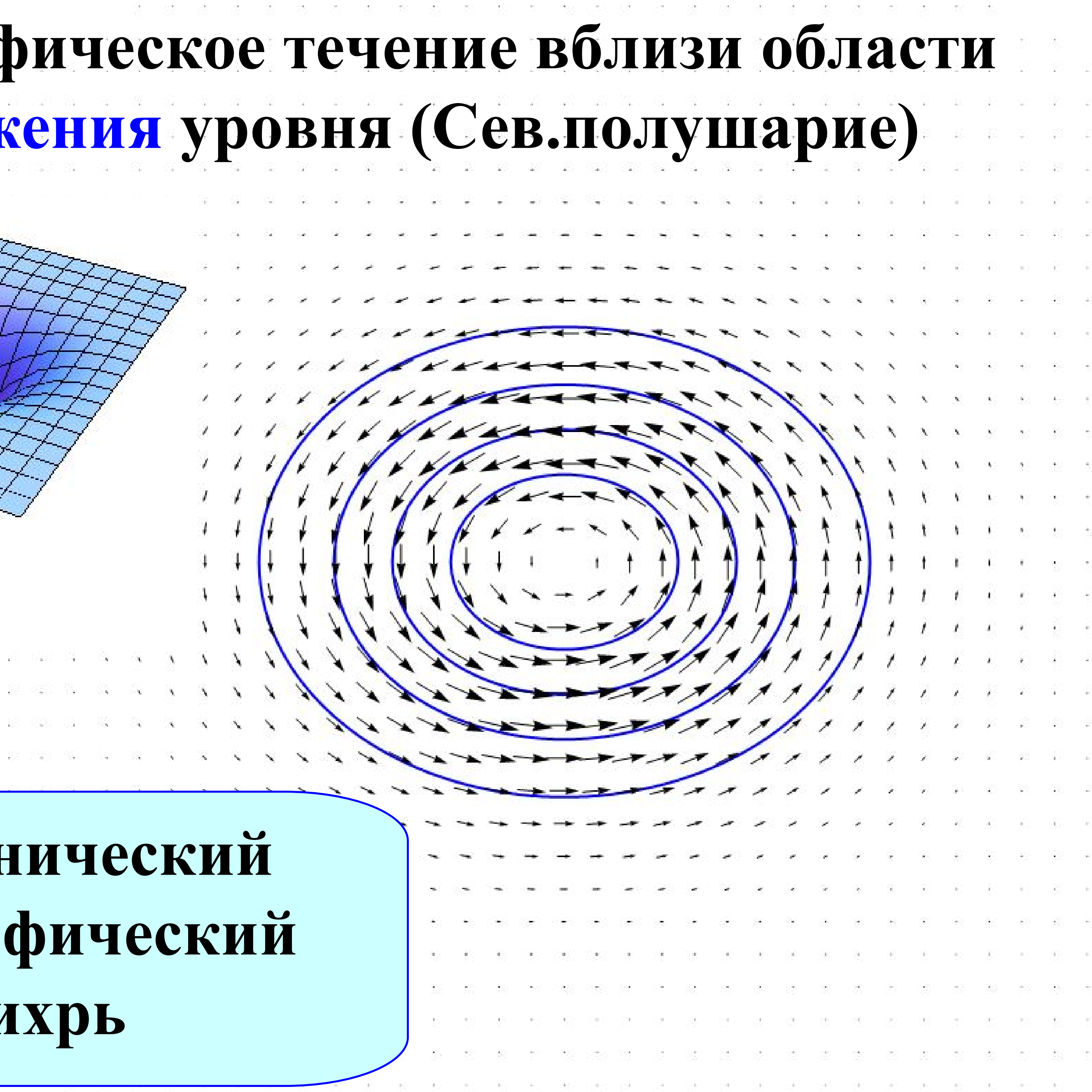


антициклонический геострофический вихрь

по часовой стрелке в сев.полушарии, в южном полушании – в обратном направлении

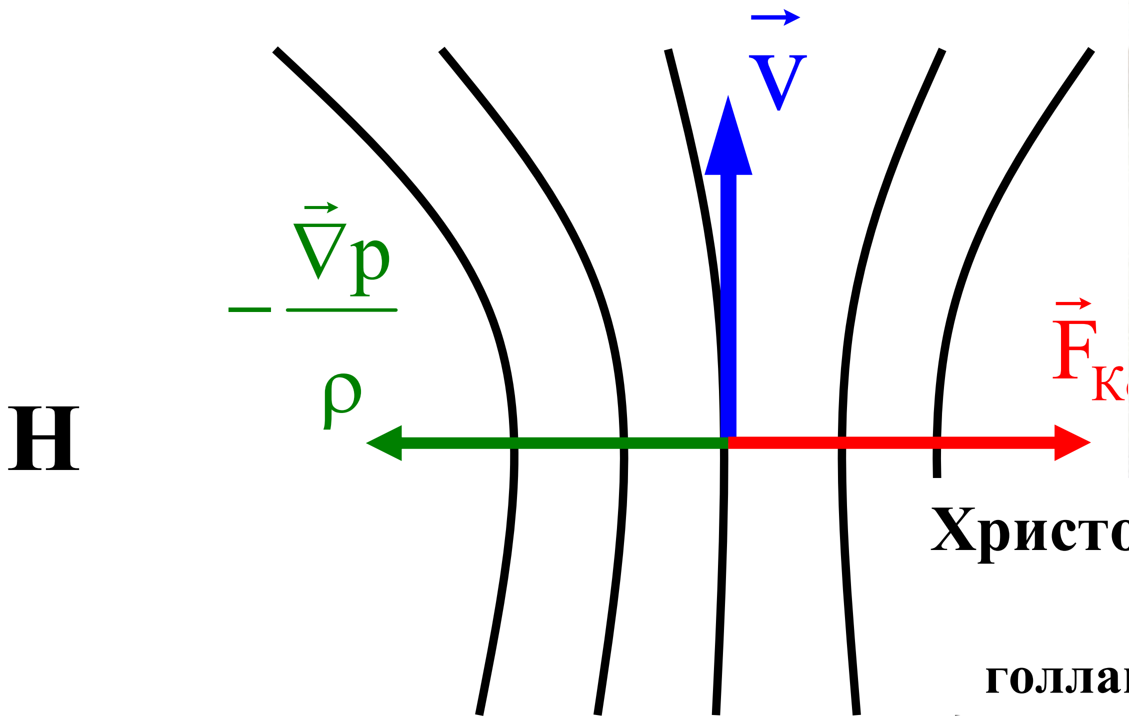
Геострофическое течение вблизи области **понижения** уровня (Сев.полушарие)





циклонический геострофический вихрь

Геострофический ветер

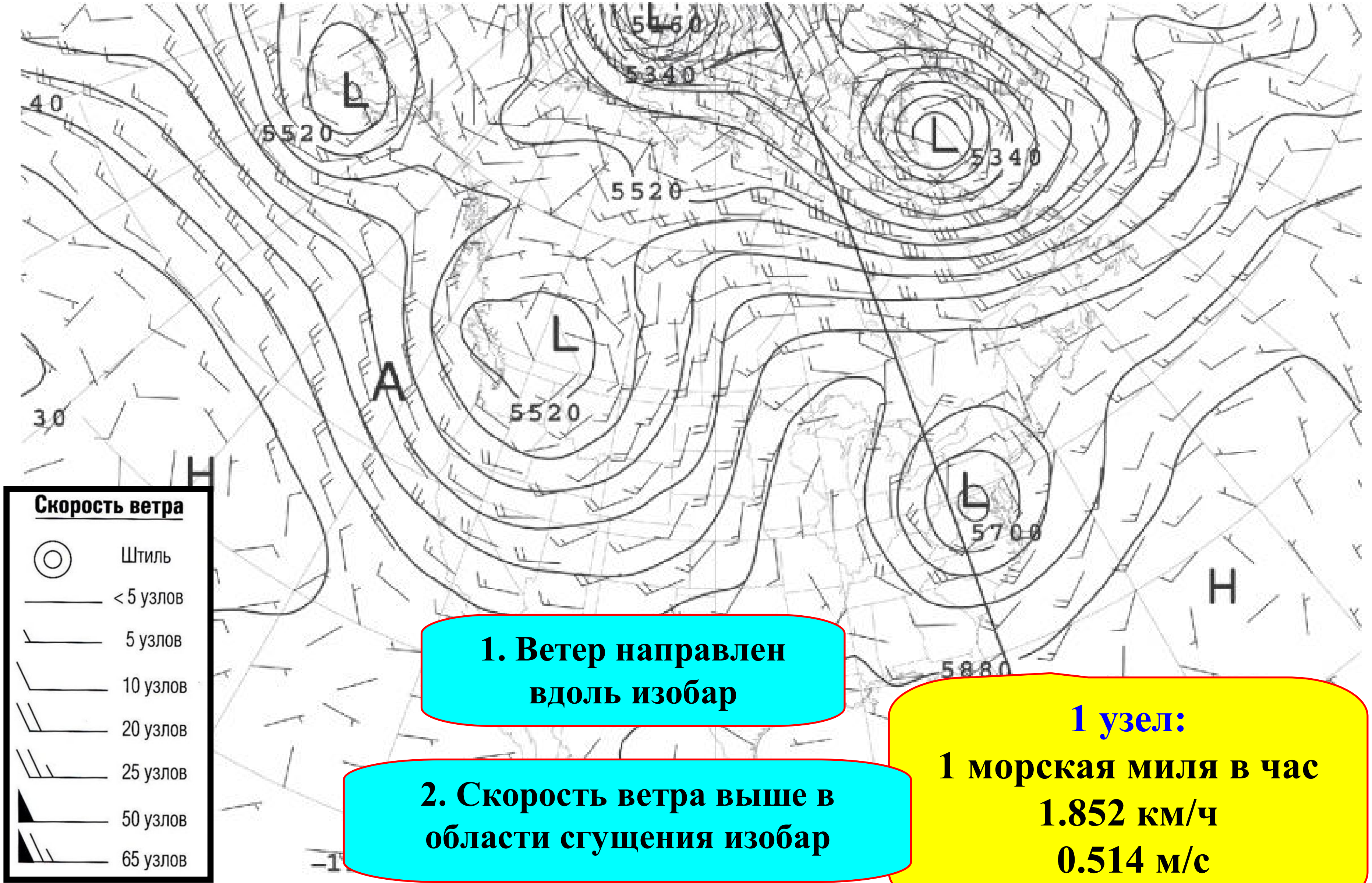


Христофор Бёйс-Баллот
1817-1890
голландский метеоролог

Правило Бейс-Балло, 1857 (Бёйс-Баллот):

«Если в северном полушарии вы встанете спиной к ветру, зона депрессии будет слева от вас, а в южном полушарии – наоборот»

Поля атмосферного давления (изолинии) и скорости ветра на высоте 500 мбар (≈ 5.5 км)



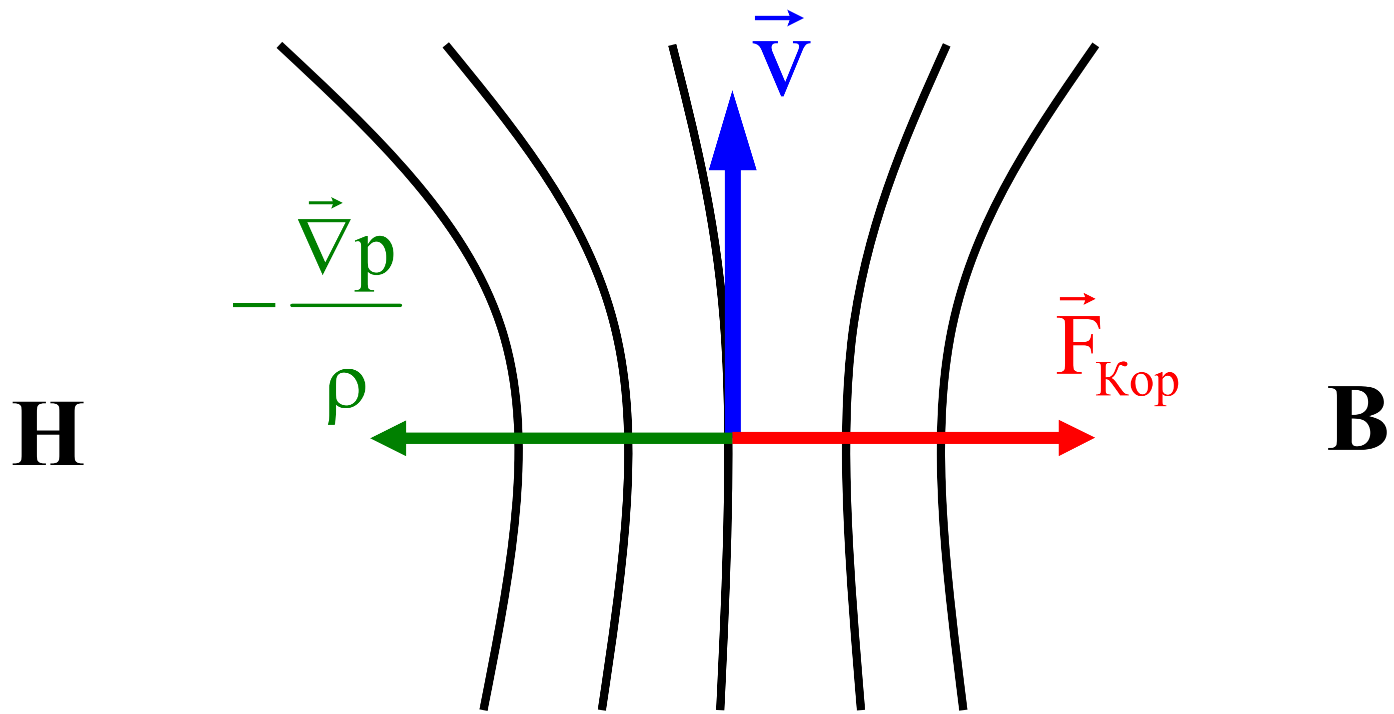
1. Ветер направлен вдоль изобар

2. Скорость ветра выше в области сгущения изобар

1 узел:
1 морская миля в час
1.852 км/ч
0.514 м/с

Геострофический ветер/течение

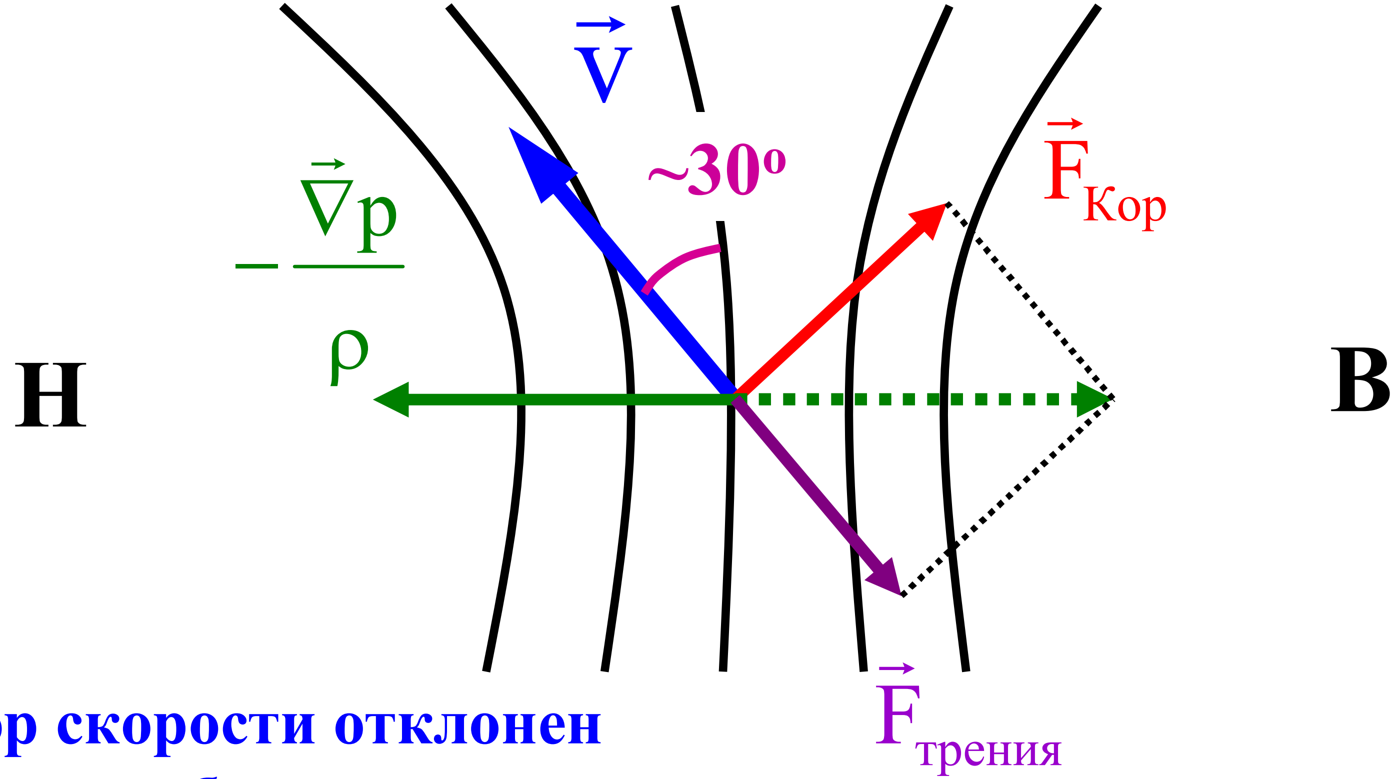
(Сев. полушарие)



Движение строго вдоль изобар!!!

Ветер/течение с учетом сил трения

(Сев. полушарие)

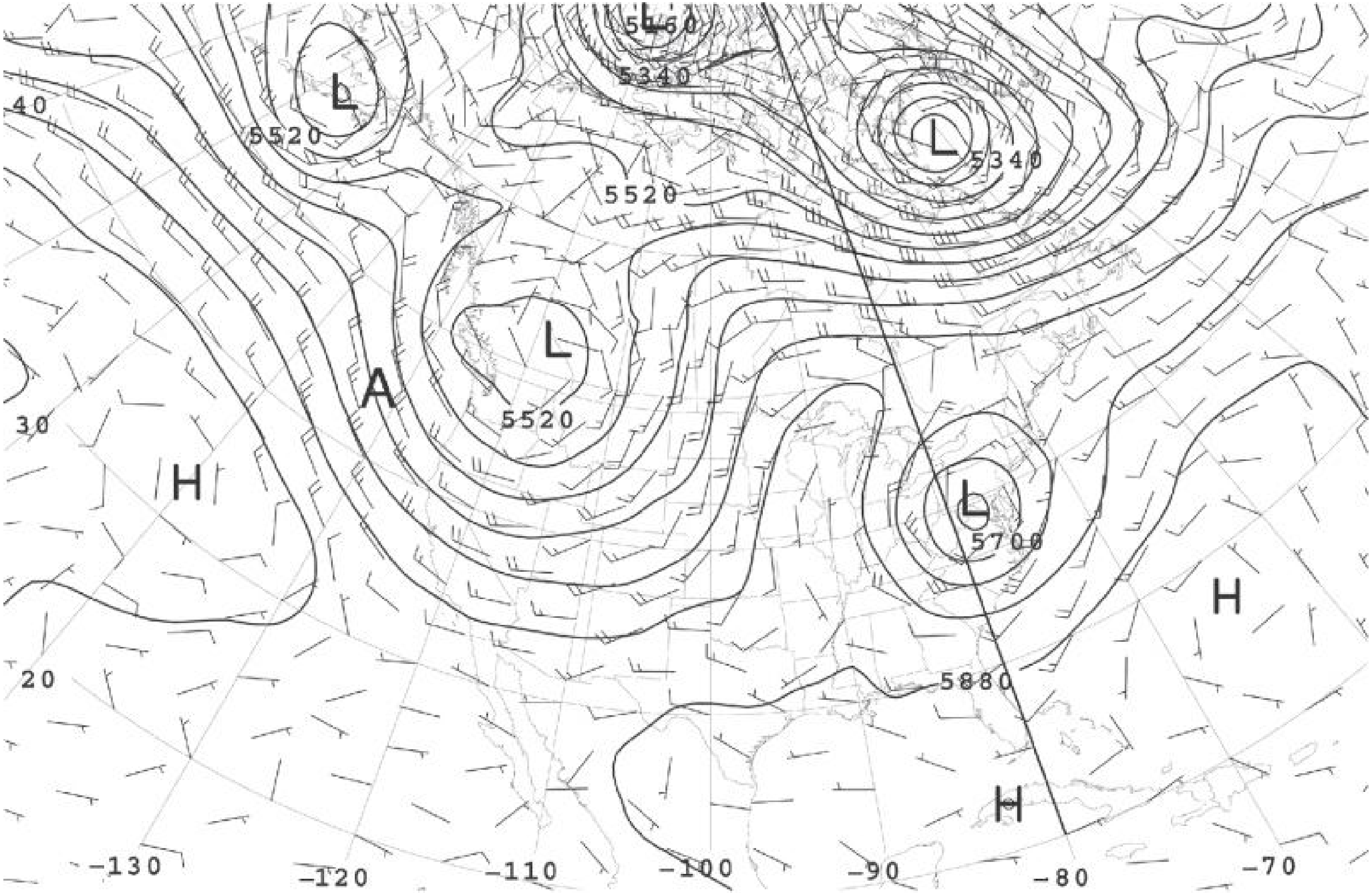


Вектор скорости отклонен влево от изобары

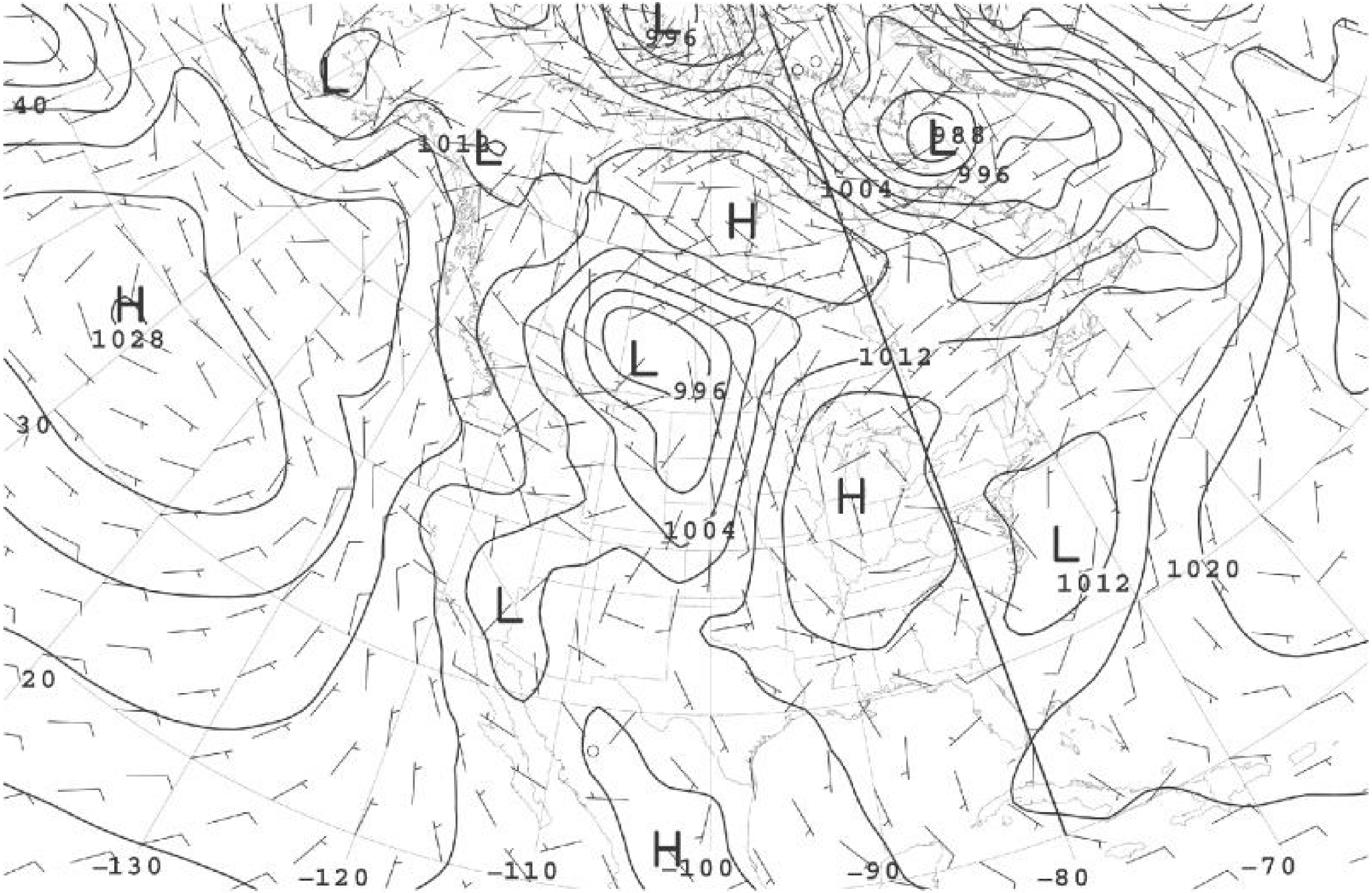
Отклонение существенно до высот ~1500 м

Отклонение у поверхности земли ~30°

Поля атмосферного давления (изолинии) и скорости ветра на высоте 500 мбар (≈ 5.5 км)

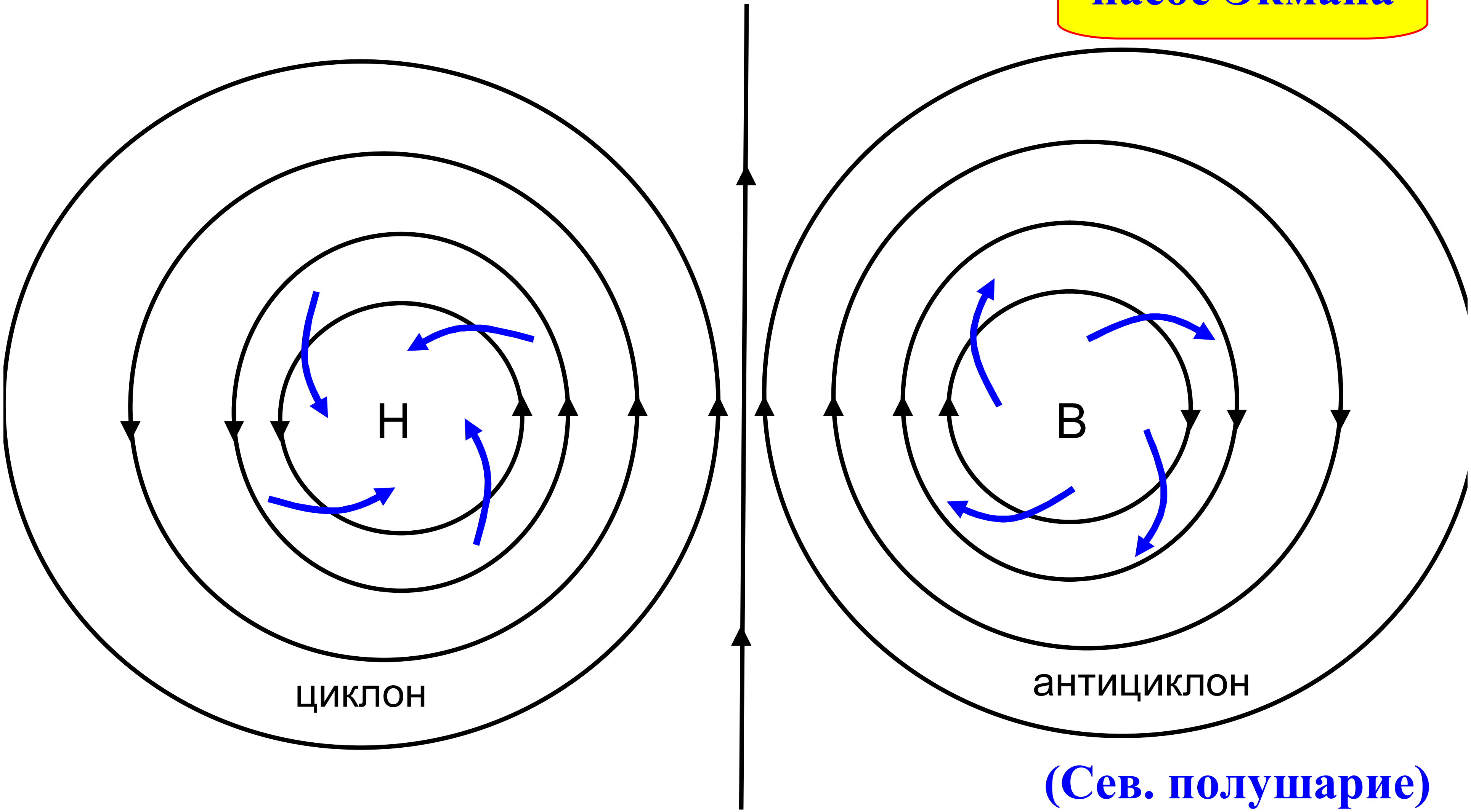


Поля атмосферного давления (изолинии) и скорости ветра у поверхности земли



У поверхности земли, где сила трения велика, происходит заток воздуха в область низкого давления и отток воздуха из области высокого давления

насос Экмана



(Сев. полушарие)

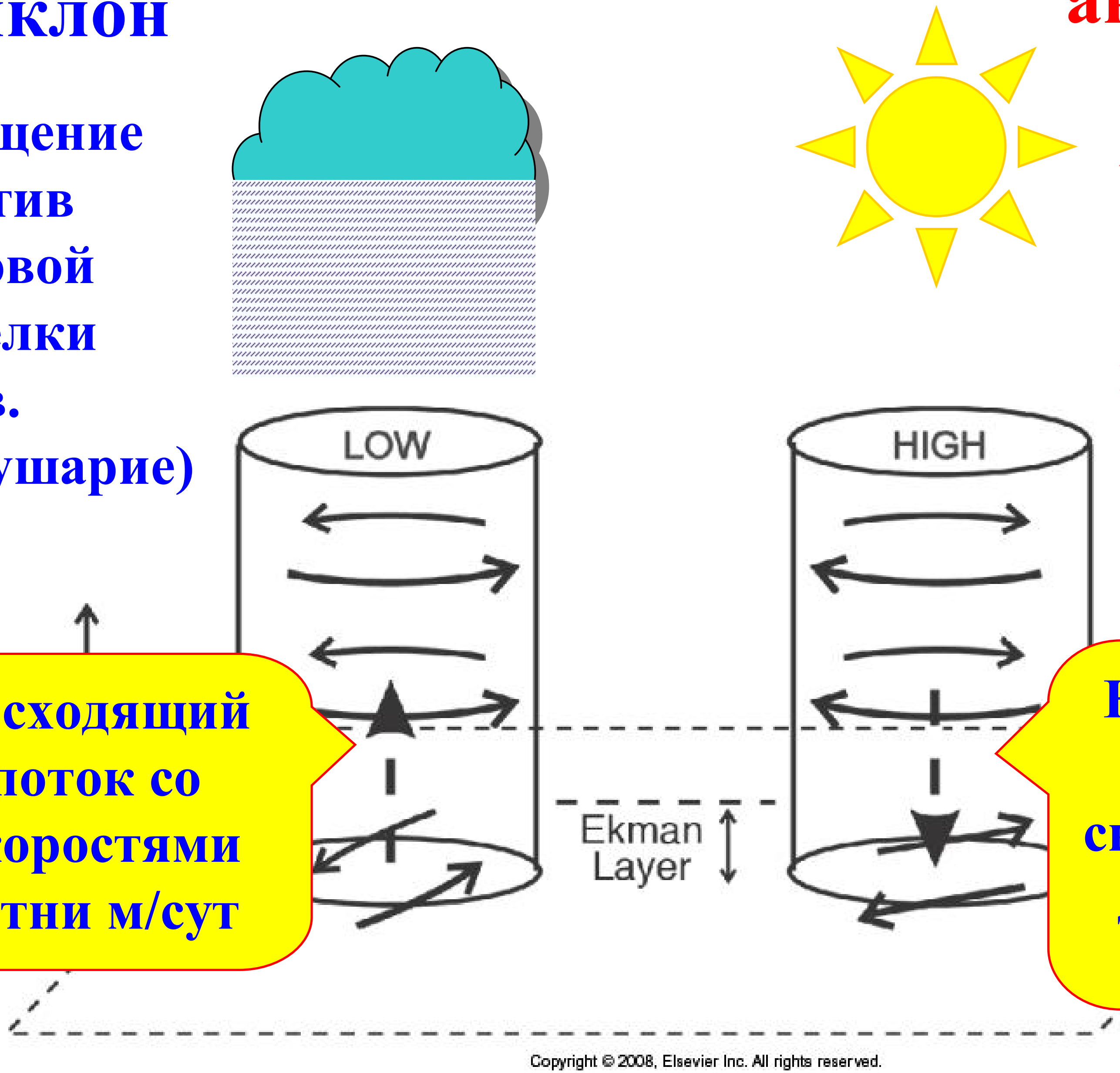
Синоптические вихри

циклон

вращение против часовой стрелки (Сев. полушарие)

антициклон

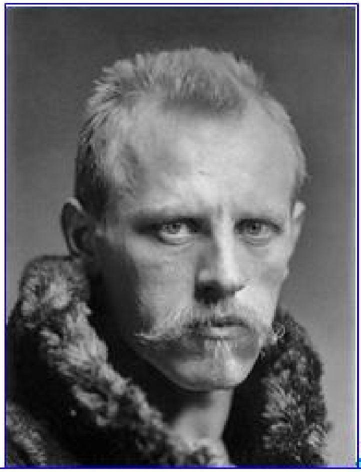
вращение по часовой стрелке (Сев. полушарие)



Восходящий поток со скоростями сотни м/сут

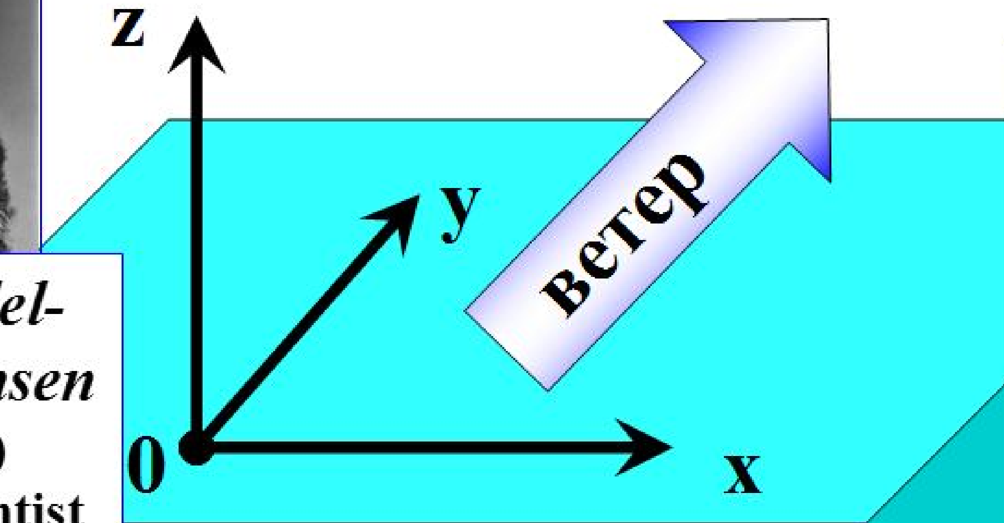
Нисходящий поток со скоростями от десятков до сотен м/сут

Задача Экмана о дрейфовом течении

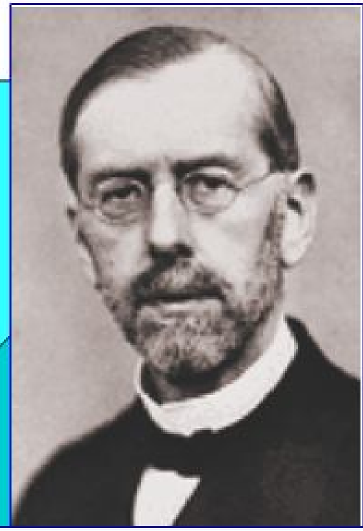


Fridtjof Wedel-Jarlsberg Nansen
(1861 –1930)
Norwegian scientist

течение, вызываемое ветром



Задача поставлена *Фритьофом Нансеном*, который наблюдал необычный дрейф льда во время экспедиции на борту «Фрама» в Гренландском море



Vagn Walfrid Ekman
(1874-1954), a Swedish physical oceanographer

Предположения:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0, \quad \rho = \text{const}$$

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial v}{\partial y}} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow w = \text{const}$$

$$w(z = -H) = 0 \quad \Rightarrow \quad w = 0$$

$$\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + \cancel{(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v}} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] + \nu \Delta \vec{v} + \vec{g}$$

$$x: \quad u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$y: \quad u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$z: \quad u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + \cancel{(\vec{v}\vec{\nabla})}\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + 2\left[\vec{v}\times\vec{\omega}\right] + \nu\Delta\vec{v} + \vec{g}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho_0}\cancel{\frac{\partial p}{\partial x}} + 2v\omega\sin\varphi + \nu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0, \\ -\frac{1}{\rho_0}\cancel{\frac{\partial p}{\partial y}} - 2u\omega\sin\varphi + \nu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = 0, \\ -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} - g = 0 \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
2v\omega\sin\varphi + \nu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0 \\
-2u\omega\sin\varphi + \nu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = 0 \\
\end{cases}
$$

для дальнейшего решения не требуется

Граничные условия

Поверхность воды:

$$\rho\nu \frac{du}{dz}\bigg|_{z=0} = 0$$

$$\rho\nu \frac{dv}{dz}\bigg|_{z=0} = \tau$$

Поведение решения на глубине:

$$u_{z\to-\infty} = 0$$

$$v_{z\to-\infty} = 0$$

Напряжение трения ветра

Задача Экмана для океана бесконечной глубины

$$\begin{cases} u'' + v \cdot f / \nu = 0 \\ v'' - u \cdot f / \nu = 0 \end{cases}$$

Граничные условия:

поверхность (z = 0)

$$u' = 0$$

$$v' = \tau / \rho\nu$$

на глубине (z = -∞)

$$u(-\infty) = 0$$

$$v(-\infty) = 0$$

Наводящие идеи для решения системы Экмана

$$u'' + \alpha^2 u = 0$$

$$u(z) = A\,e^{i\alpha z} + B\,e^{-i\alpha z}$$

$$u(z) = A\sin\alpha z + B\cos\alpha z$$

$$u'' - \alpha^2 u = 0$$

$$u(z) = A\,e^{\alpha z} + B\,e^{-\alpha z}$$

$$u(z) = A\sinh\alpha z + B\cosh\alpha z$$

$$\begin{cases} u'' + \dfrac{f}{\nu} v = 0 \\ v'' - \dfrac{f}{\nu} u = 0 \quad \times i \end{cases}$$

$$Z = u + i\,v$$

$$u = \mathrm{Re}(Z)$$

$$v = \mathrm{Im}(Z)$$

$$u'' + iv'' + \frac{f}{\nu}\left(v - i\,u\right) = 0$$

$$(u + iv)'' - i\frac{f}{\nu}\left(u + iv\right) = 0$$

$$\boxed{Z'' - \alpha^2 Z = 0, \quad \text{где} \quad \alpha = \sqrt{i \cdot f / \nu}}$$

$$\boxed{Z = A\, e^{\alpha z} + \cancel{B\, e^{-\alpha z}}}$$

$$\sqrt{i} = e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\alpha = (1+i)\sqrt{\frac{f}{2\nu}}}$$

$$\boxed{i = e^{i\pi/2}}$$

$$\mathrm{Re}(\alpha) > 0$$

$$\lim_{z \to -\infty} Z = 0 \quad \Rightarrow B = 0$$

$$Z = A\,e^{\alpha z}$$

$$\alpha = (1+i)\sqrt{\frac{f}{2\nu}} = e^{i\pi/4}\sqrt{\frac{f}{\nu}}$$

удовлетворяем г.у. на поверхности (при z = 0)

$$Z' = A\alpha = u' + iv' = i\frac{\tau}{\rho\nu}$$

$$A = i\frac{\tau}{\rho\nu\alpha} = \frac{e^{i\pi/2}\tau}{\rho\nu\, e^{i\pi/4}\sqrt{\frac{f}{\nu}}} = \frac{e^{i\pi/4}\tau}{\rho\nu\sqrt{\frac{f}{\nu}}}$$

Решение задачи Экмана:

$$Z = \frac{e^{i\pi/4}\tau}{\rho\nu\sqrt{f/\nu}}\, e^{(1+i)\sqrt{\frac{f}{2\nu}}z}$$

глубина Экмана

$$d = \sqrt{2\nu/f}$$

$$V_0 = \frac{\tau\, d}{\sqrt{2}\,\rho\nu}$$

$$Z = V_0\, e^{(1+i)\frac{z}{d}+i\frac{\pi}{4}} = V_0\, e^{\frac{z}{d}} e^{i\left(\frac{z}{d}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$u = \mathrm{Re}(Z) = V_0 e^{z/d}\cos\left(z/d+\pi/4\right)$$

$$v = \mathrm{Im}(Z) = V_0 e^{z/d}\sin\left(z/d+\pi/4\right)$$

Спираль Экмана

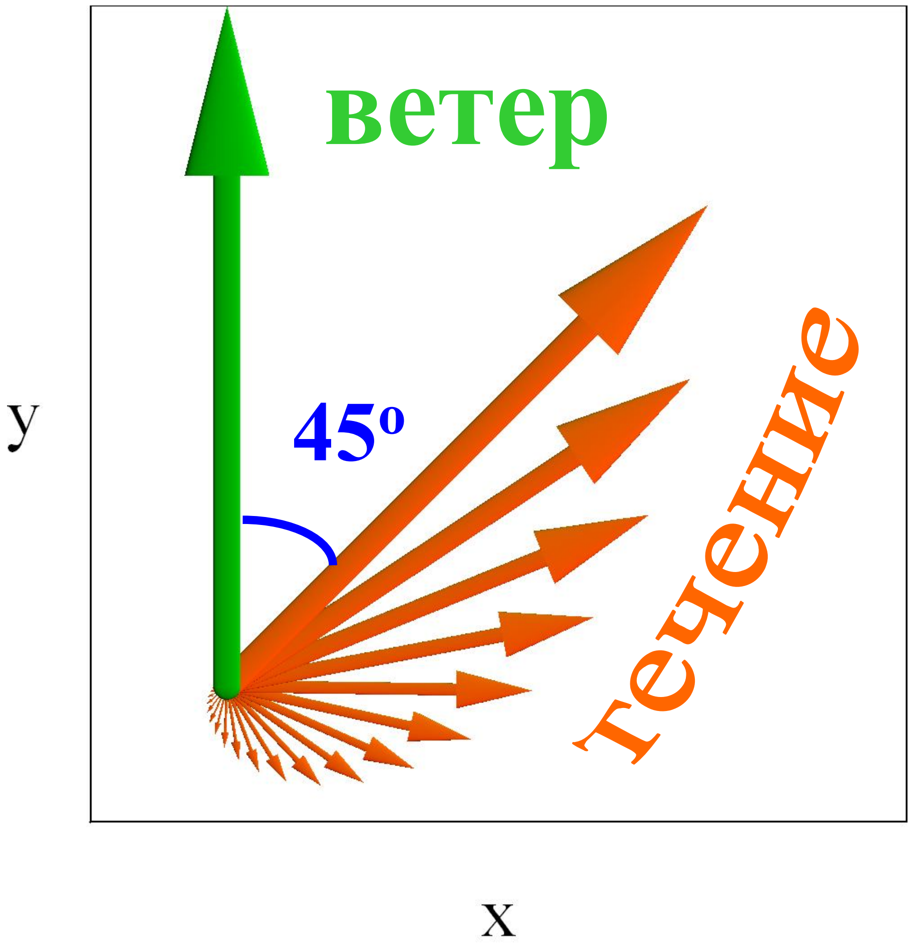
$$u(z) = V_0 e^{z/d} \cos(z/d + \pi/4)$$

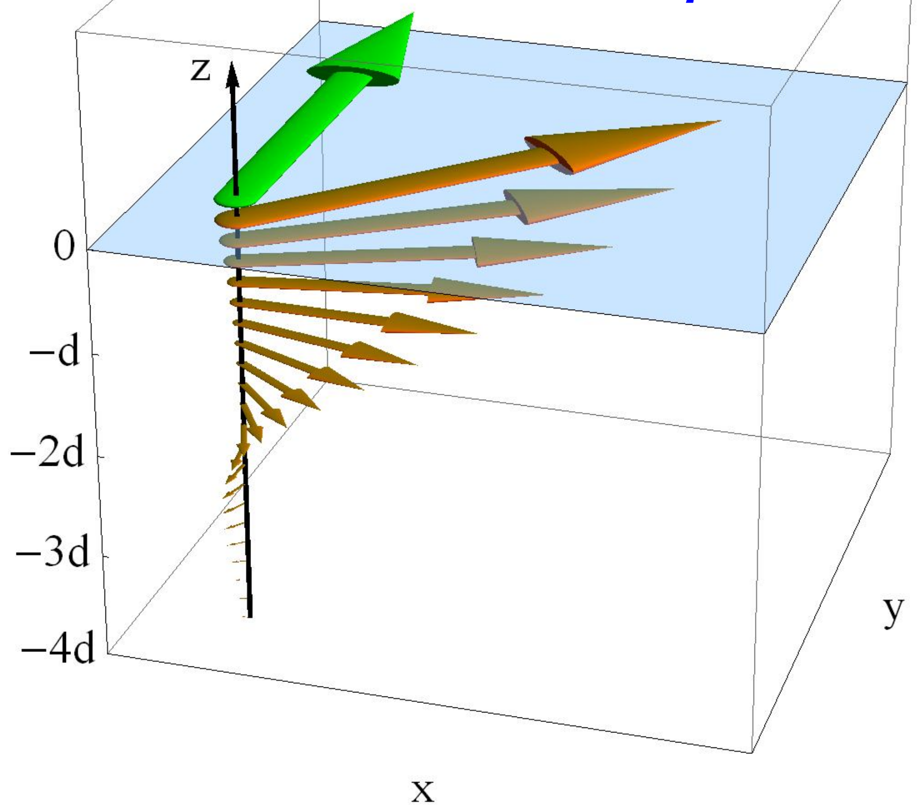
$$v(z) = V_0 e^{z/d} \sin(z/d + \pi/4)$$

глубина Экмана

$$d = \sqrt{2\nu / f}$$

$$V_0 = \frac{\tau d}{\sqrt{2}\,\rho\nu}$$





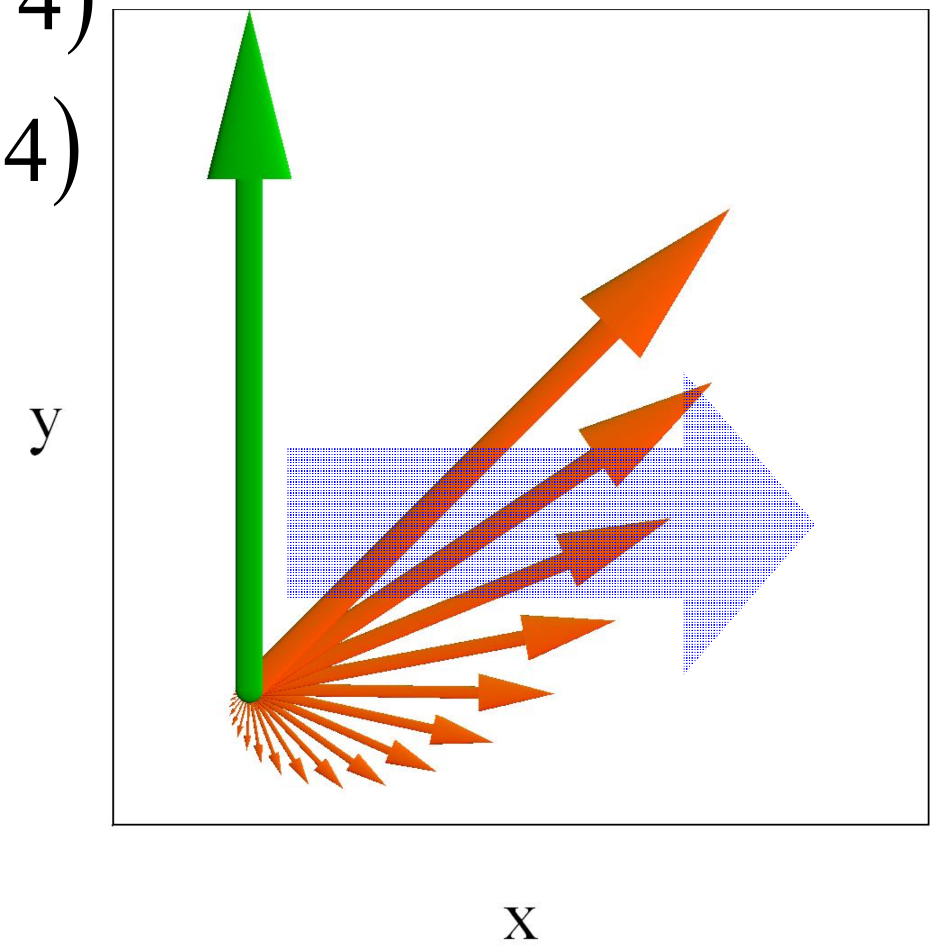
Направление интегрального переноса вод

$$u(z) = V_0 e^{z/d} \cos(z/d + \pi/4)$$

$$v(z) = V_0 e^{z/d} \sin(z/d + \pi/4)$$

$$\int_{-\infty}^{0} u(z)\,dz = \frac{V_0 d}{\sqrt{2}} > 0$$

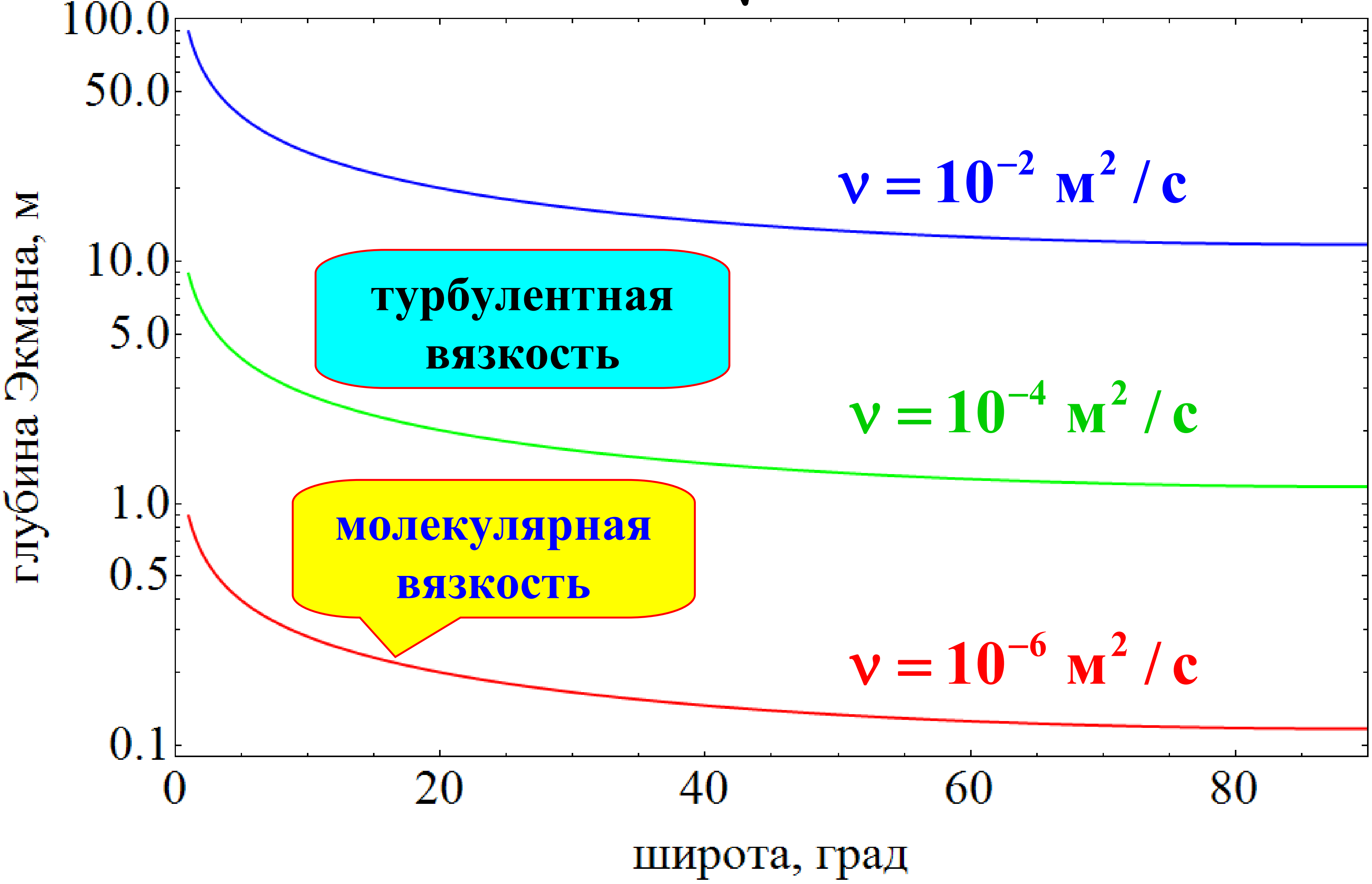
$$\int_{-\infty}^{0} v(z)\,dz = 0$$



Интегральный перенос вод перпендикулярен направлению ветра!!!

Глубина Экмана

$$d = \sqrt{2\nu / f} = \sqrt{\nu / \omega \sin(\varphi)}$$



Задача Экмана для океана конечной глубины

$$\begin{cases} u'' + v \cdot f / \nu = 0 \\ v'' - u \cdot f / \nu = 0 \end{cases}$$

Граничные условия:

поверхность (z = 0)

$$u' = 0$$

$$v' = \tau / \rho\nu$$

дно (z = -H)

$$u(-H) = 0$$

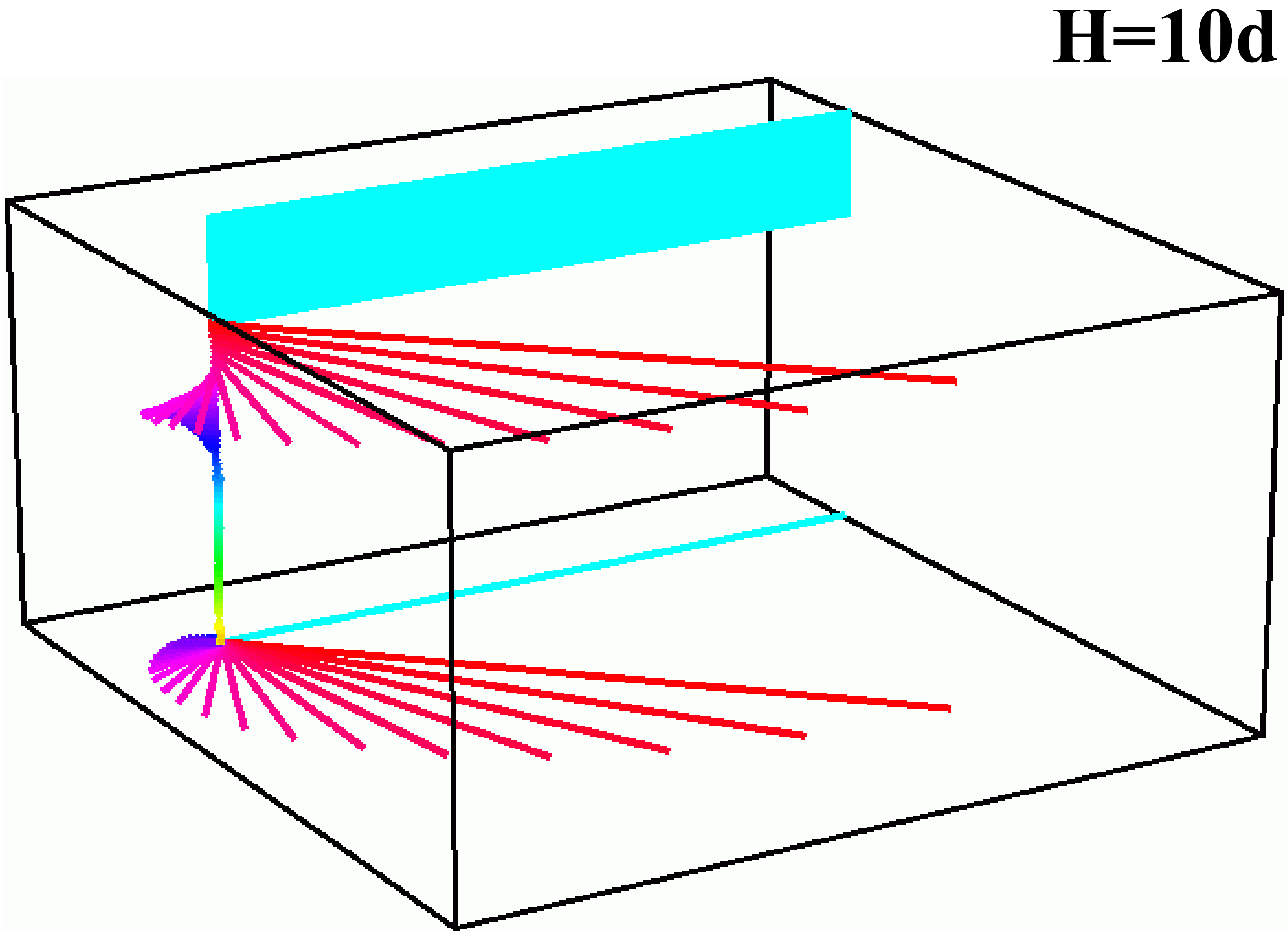
$$v(-H) = 0$$

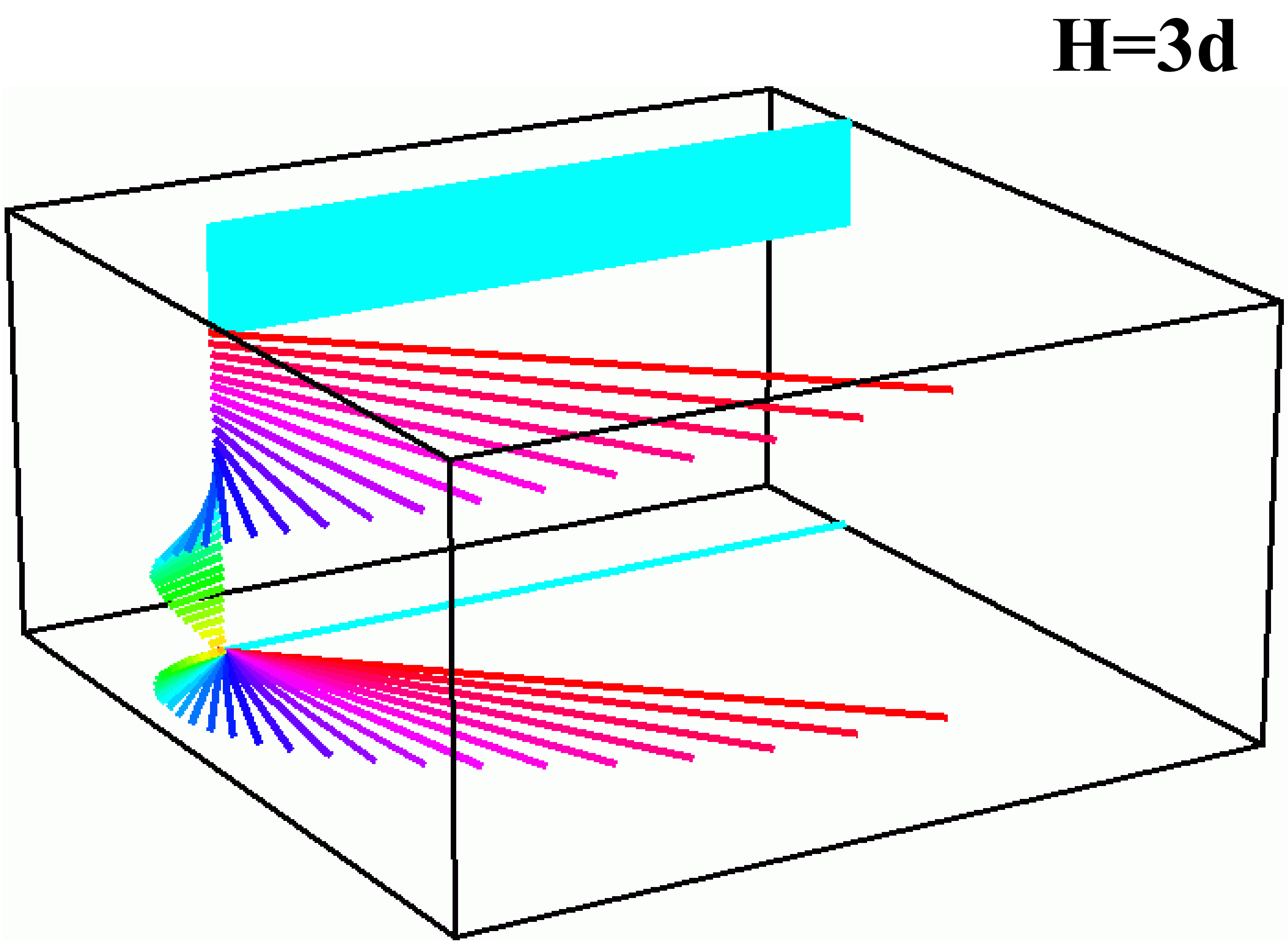
условие прилипания

$$\boxed{Z'' - \alpha^2 Z = 0, \quad \text{где} \quad \alpha = \sqrt{i \cdot f / \nu}}$$

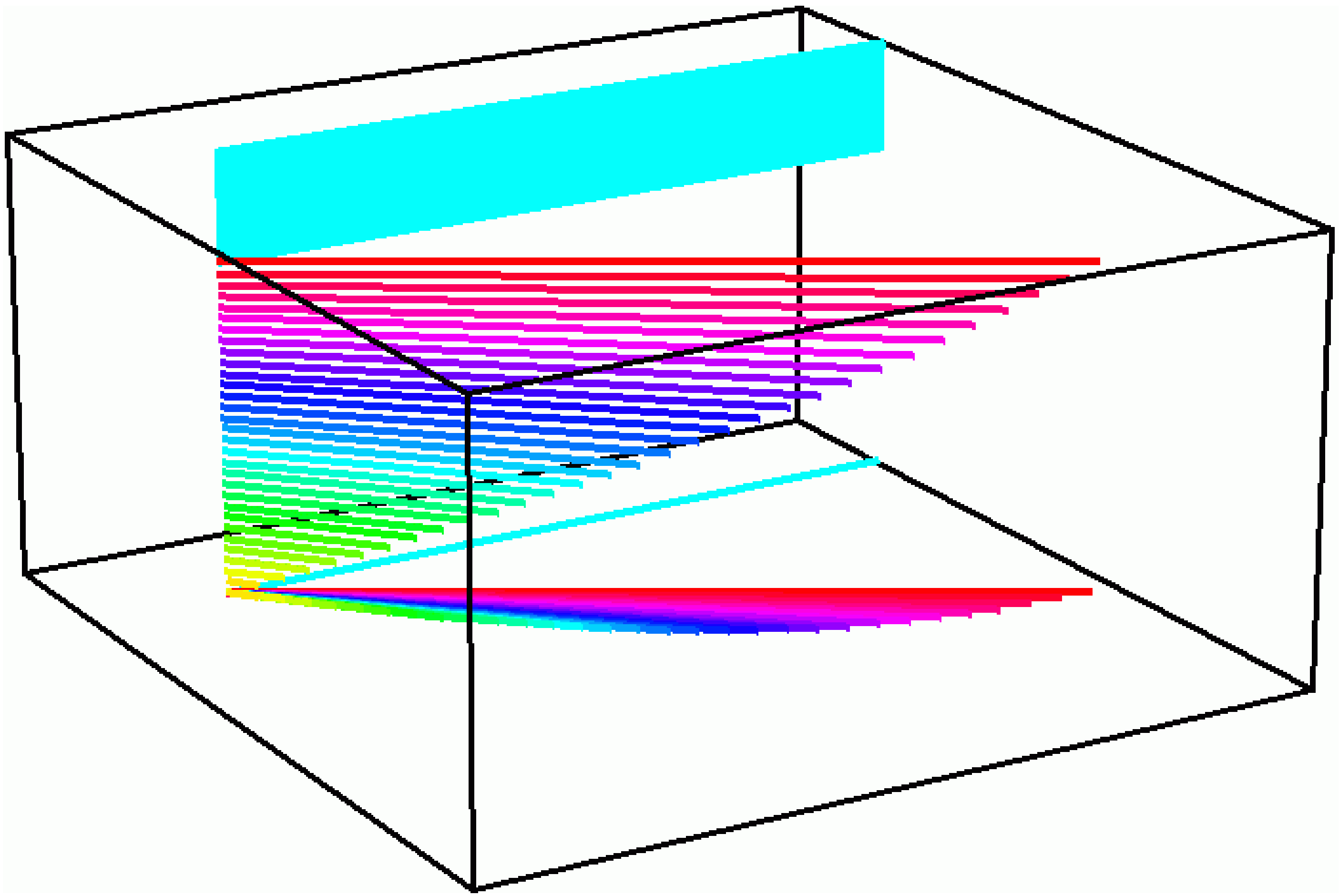
$$\boxed{Z = A\, e^{\alpha z} + B\, e^{-\alpha z}}$$

$$A \neq 0 \qquad B \neq 0$$

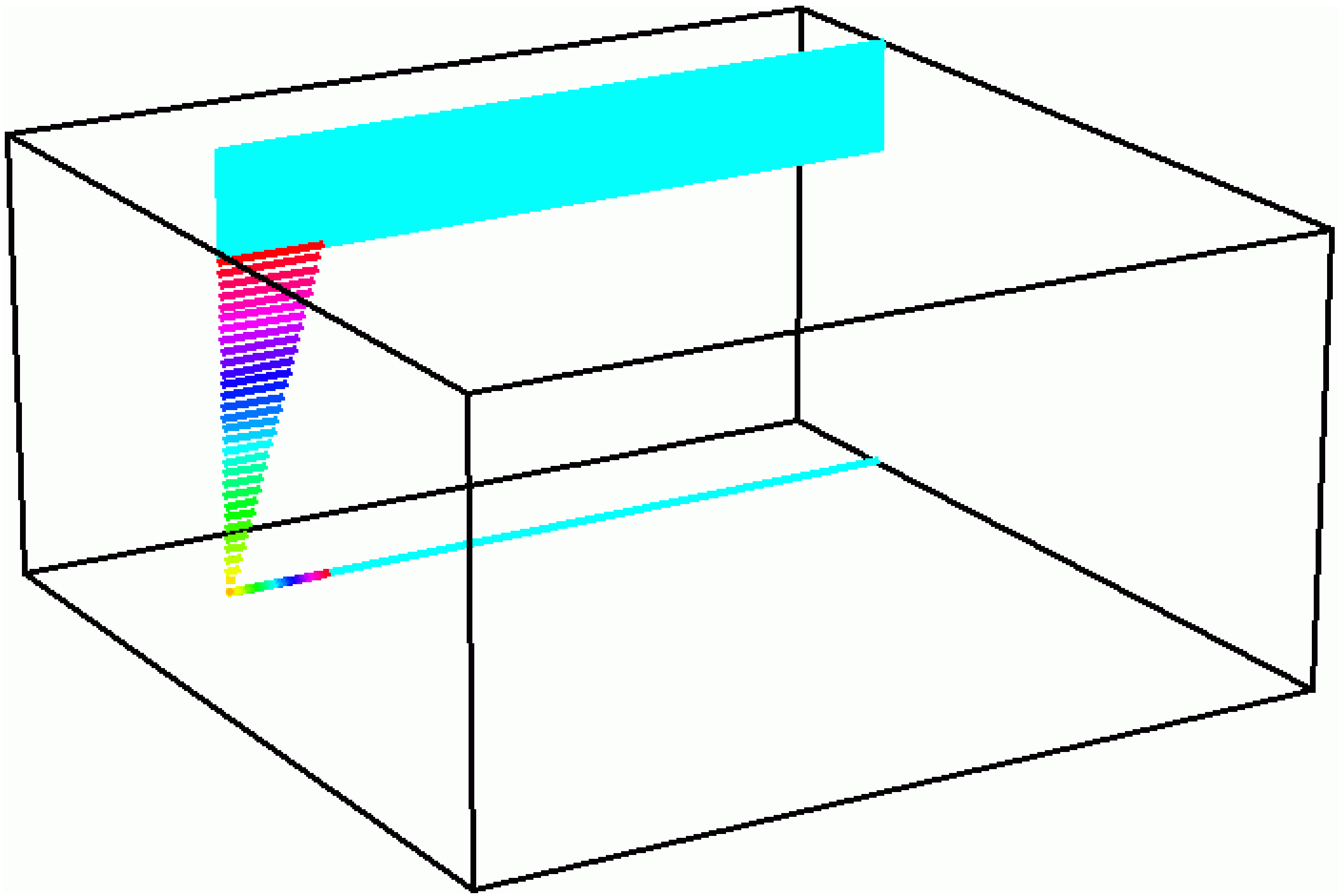

H=10d


H=3d

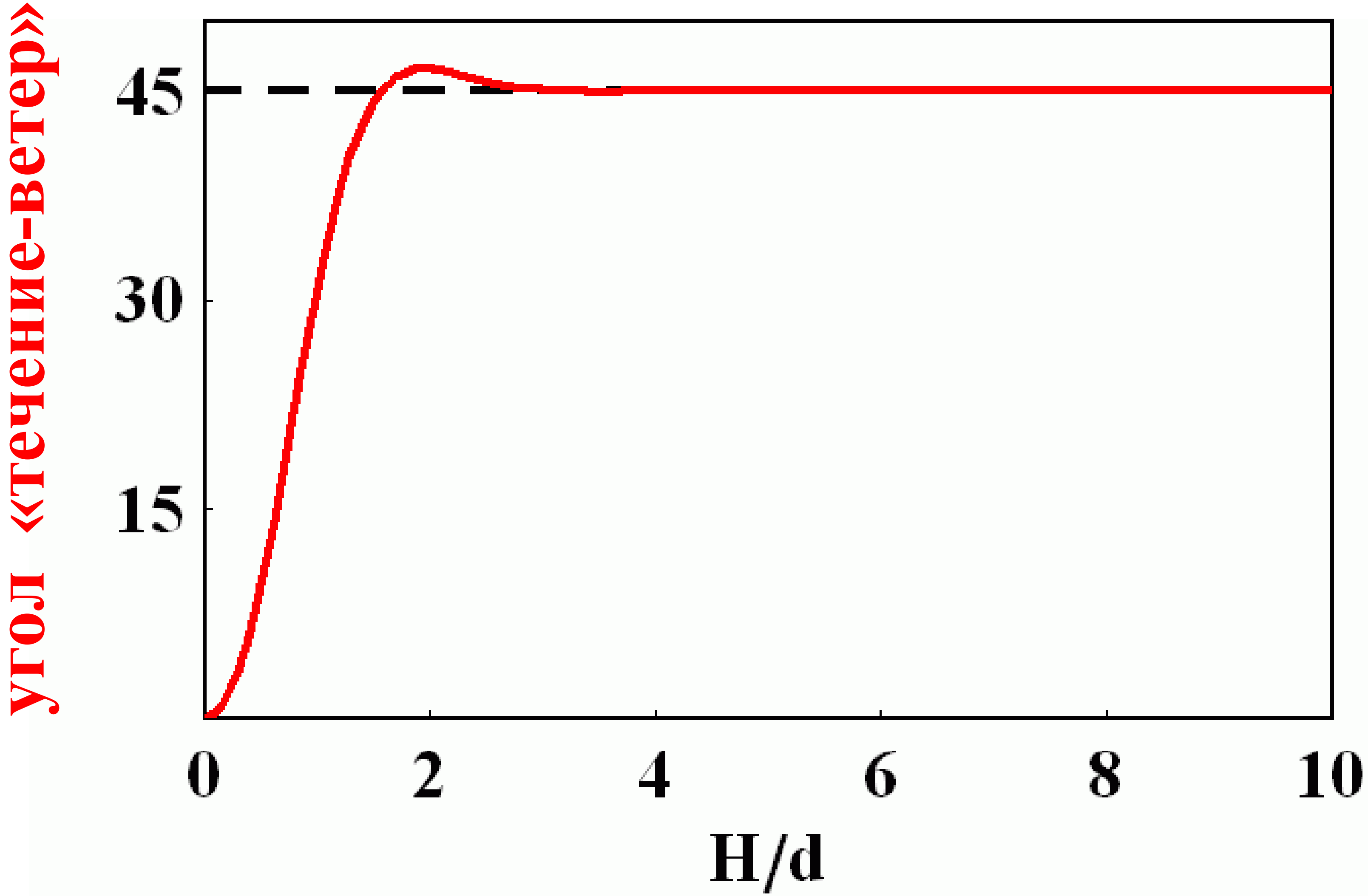
H=d



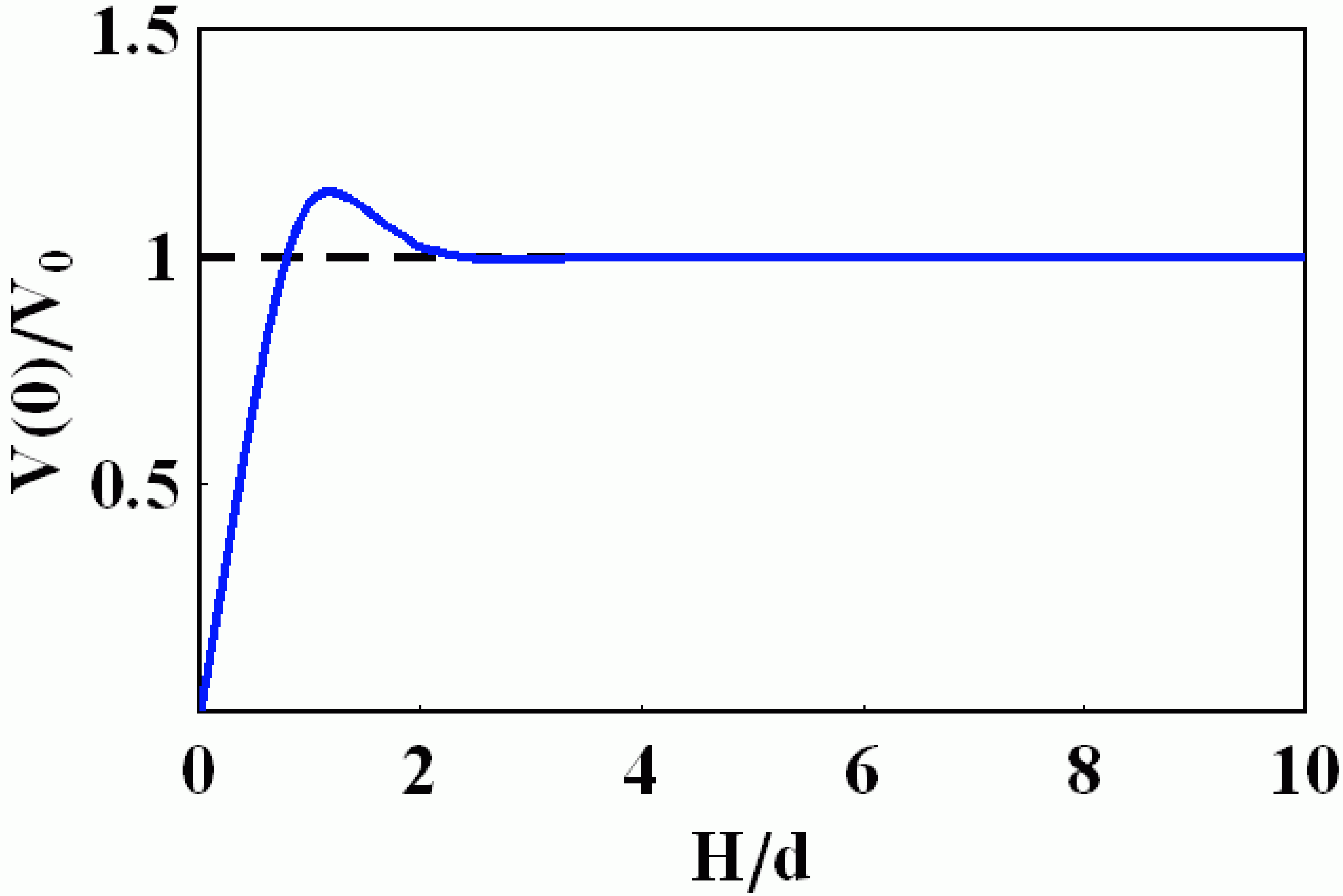
H=d/10



Течение на поверхности



Течение на поверхности



Влияние глубины океана на интегральный перенос