

Физическое и математическое
моделирование процессов в геосредах
(Введение в физику моря и вод суши)

2021 Лекция №11

Носов Михаил Александрович
отделение геофизики, физический факультет МГУ

**Элементы
линейной
потенциальной
теории волн**

Дисперсионное соотношение для поверхностных гравитационных волн

$$\omega^2 = gk \operatorname{th}(kH)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

**циклическая
частота**

$$c = \lambda / T$$

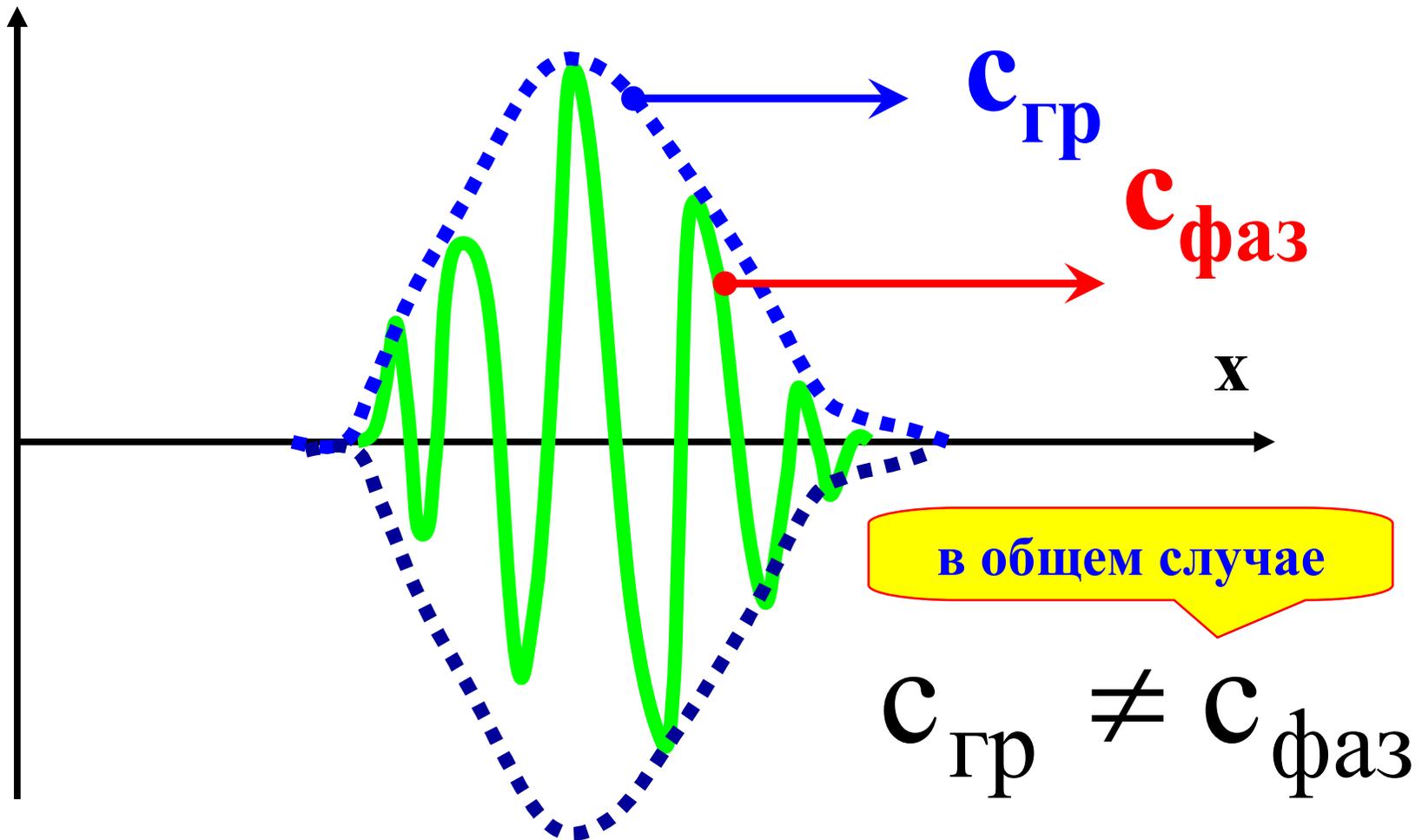
$$c = \omega / k$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

**волновое
число**

Фазовая и групповая скорости волн

энергия переносится группами волн,
т.е. с групповой скоростью



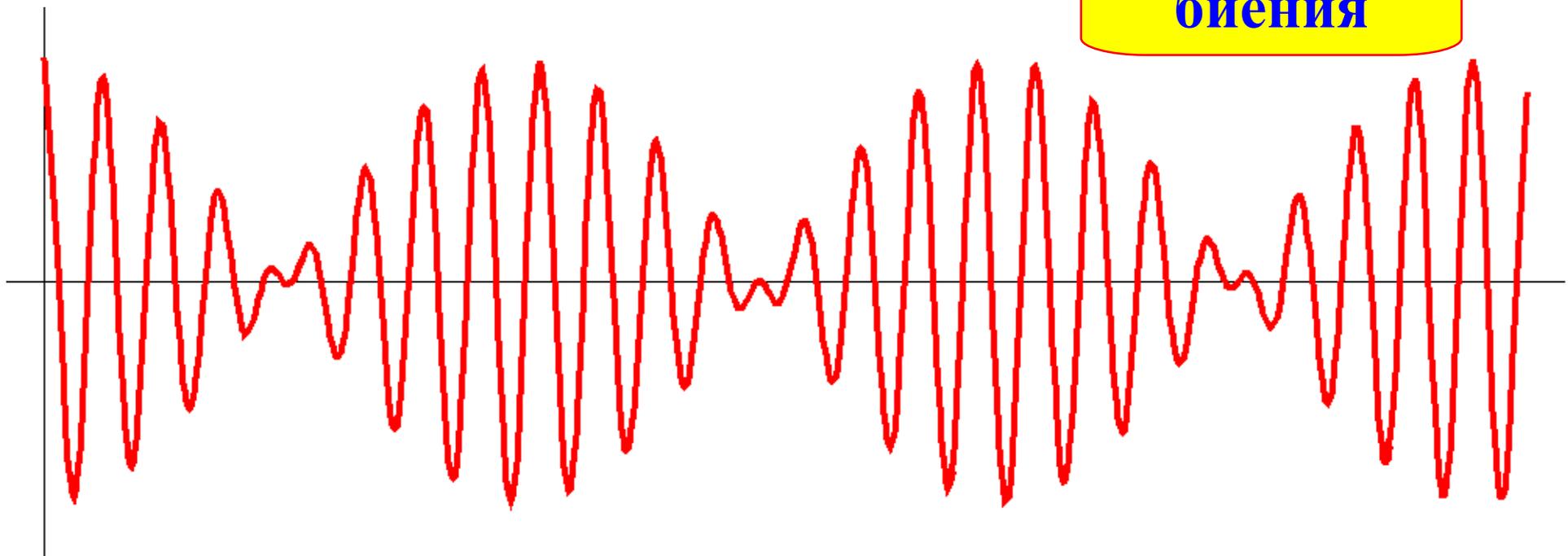
в общем случае

$$c_{гр} \neq c_{фаз}$$

$$\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) =$$

$$= 2 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$

биения



$$\begin{aligned}
& \cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x) = \\
& = 2 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right) \times \\
& \quad \times \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right) = \\
& \quad \xrightarrow[\omega_1]{\frac{|\omega_1 - \omega_2| \ll 1}}{\Rightarrow \frac{|k_1 - k_2| \ll 1}{k_1}} \\
& = 2 \cos\left(k \left[\frac{\omega}{k} t - x \right]\right) \cos\left(\frac{\Delta k}{2} \left[\frac{\Delta \omega}{\Delta k} t - x \right]\right) \\
& \qquad \qquad \qquad \searrow \qquad \qquad \qquad \searrow \\
& \qquad \qquad \qquad c_{\text{фаз}} \qquad \qquad \qquad c_{\text{гр}}
\end{aligned}$$

$$c_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k}$$

$$c_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}$$

Недиспергирующие волны

$$\omega = c_{\text{фаз}} k, \quad c_{\text{фаз}} \neq f(k)$$

$$c_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = c_{\text{фаз}}$$

Диспергирующие волны

$$c_{\text{гр}} \neq c_{\text{фаз}}$$

$$c_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k}$$

$$c_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}$$

Диспергирующие волны

$$c_{\text{фаз}} = \frac{\sqrt{gk \operatorname{th}(kH)}}{k}$$

$$c_{\text{гр}} = \frac{g(kH / \operatorname{ch}^2(kH) + \operatorname{th}(kH))}{2\sqrt{gk \operatorname{th}(kH)}}$$

Дисперсионное соотношение для гравитационно-капиллярных волн

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\alpha}{\rho} k^3 \right) \text{th}(kH)$$

$$\alpha \approx 0.075 \text{ Н/м}$$

при $t = 20^\circ \text{C}$

$$p_1 - p_2 = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

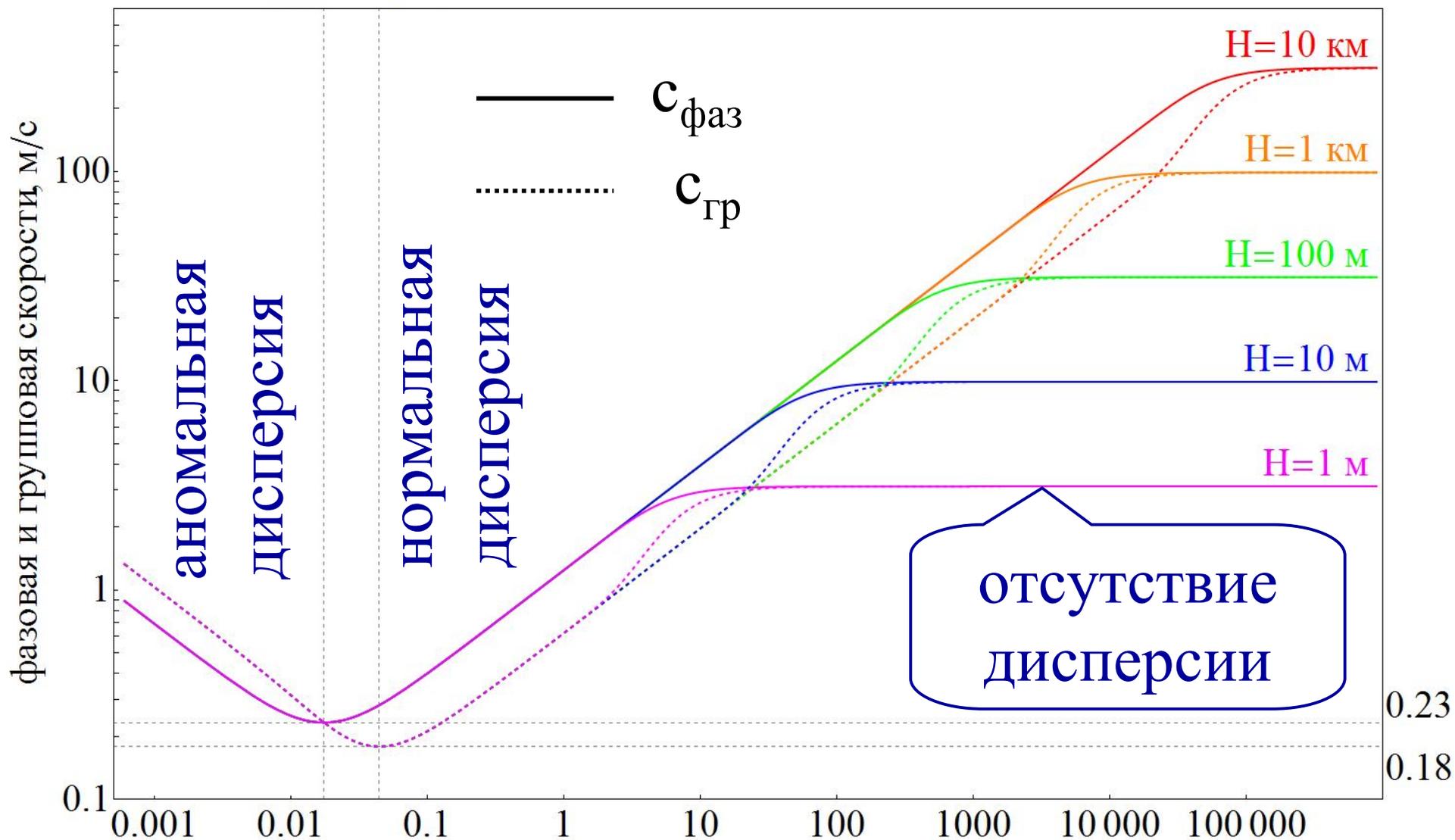
формула
Лапласа

капиллярные

гравитационные

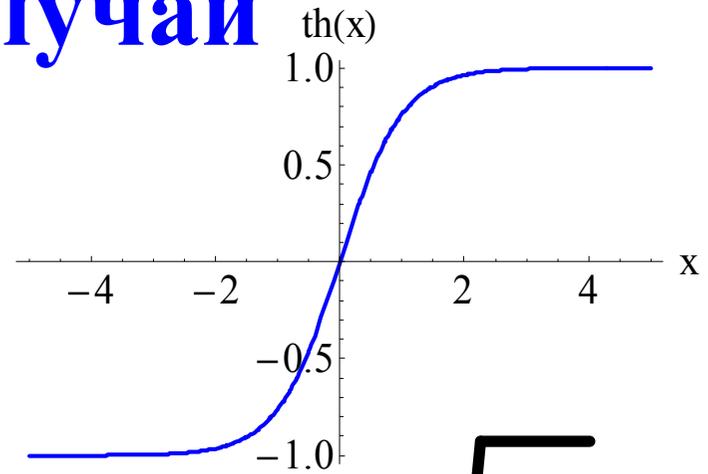
гравитационно-капиллярные

0.017 0.044



Пределные случаи

$$\omega^2 = gk \operatorname{th}(kH)$$



«Глубокая вода» ($kH \gg 1$)

$$\omega^2 = gk$$

$$c_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

групповая скорость
меньше фазовой

$$\omega = \sqrt{gk}$$

$$c_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}}$$

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g \lambda}{2\pi}}$$

объясняет
явление
«мертвая
зыбь»

$$\lambda = 1 \text{ м} \Rightarrow c \approx 1.3 \text{ м/с}$$

$$\lambda = 10 \text{ м} \Rightarrow c \approx 4 \text{ м/с}$$

$$\lambda = 100 \text{ м} \Rightarrow c \approx 13 \text{ м/с}$$

Пределные случаи

$$\omega^2 = gk \operatorname{th}(kH)$$

Волны на «мелкой воде» не подвержены дисперсии

групповая скорость
равна фазовой

«Мелкая вода» ($kH \ll 1$)

$$\omega^2 = gH k^2$$

$$c_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gH}$$

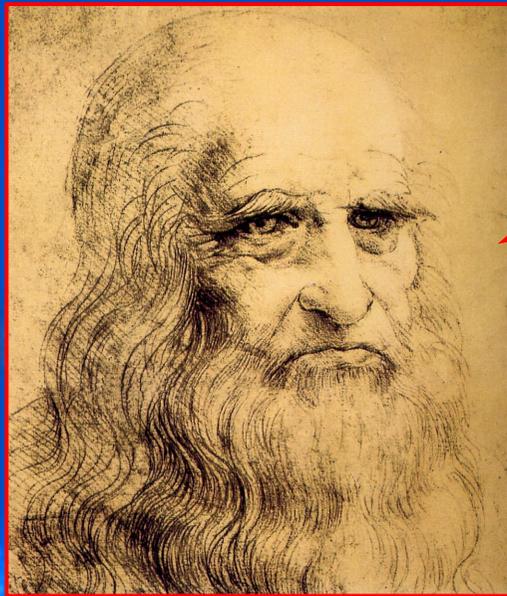
$$\omega = \sqrt{gH} k$$

$$c_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{gH}$$

Акустические

ВОЛНЫ

«...погрузив трубу одним концом в воду и прижав другой ее конец к уху, можно услышать корабли, идущие вдали...»



Леонардо да Винчи
1452- 1519



Система уравнений для описания линейных волн без учета вращения Земли и сил вязкого трения

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \end{array} \right.$$

**Гравитационные
волны**

**Акустические
волны**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla} p'}{\rho_0} \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}' = 0 \end{array} \right.$$

\vec{v}' - малая

величина

$$\frac{\vec{\nabla} p_0}{\rho_0} = \vec{g}$$

ρ_0

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$$

$$\vec{v}_0 = 0$$

$$p = p_0 + p'$$

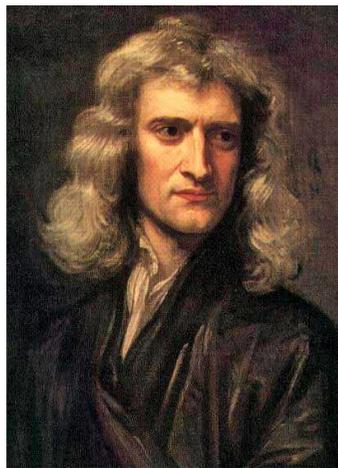
$$|p'| \ll p_0$$

$$\rho = \rho_0 + \rho'$$

$$|\rho'| \ll \rho_0$$

~~$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{p}} \right)_T \mathbf{p}'$$~~

~~$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{p}} \right)_T = \frac{1}{c_N^2}$$~~



Sir Isaac Newton

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{p}} \right)_s \mathbf{p}'$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{p}} \right)_s = \frac{1}{c^2}$$



Pierre-Simon Laplace

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla} p'}{\rho_0} \quad | \text{div} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \text{div} \vec{v}' = 0 \quad | \frac{\partial}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s p' \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \operatorname{div}(\vec{v}')}{\partial t} = -\frac{\Delta p'}{\rho_0} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial \operatorname{div}(\vec{v}')}{\partial t} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s = \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial \operatorname{div}(\vec{v}')}{\partial t} = 0 \right.$$

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \Delta p' = 0$$

Скорость звука

Волновое уравнение (акустика)

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \Delta p' = 0$$

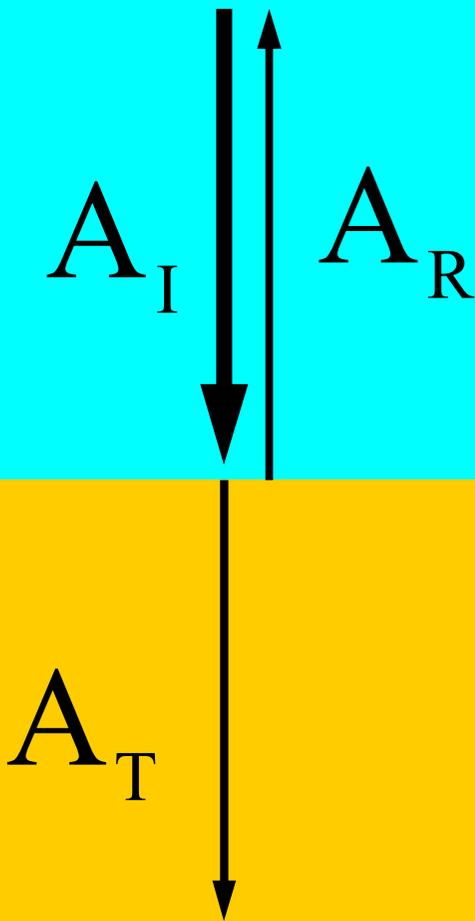
$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \approx \begin{matrix} \text{воздух} \\ 340 \text{ м / с} \\ \text{вода} \\ 1500 \text{ м / с} \end{matrix}$$

Скорость звука

Граничные условия

ρc

акустическая жесткость



$$\rho_2 c_2 \gg \rho_1 c_1 \Rightarrow R = 1$$
$$\rho_2 c_2 \ll \rho_1 c_1 \Rightarrow R = -1$$

$$R \equiv \frac{A_R}{A_I} = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}$$

$$\rho_2 c_2 \approx \rho_1 c_1 \Rightarrow R \approx 0$$

Граничные условия (1)

ρc

акустическая жесткость

$$\rho c = 1.26 \cdot 340 \approx 430 \text{ кг / м}^2 \cdot \text{с}$$

воздух

отражение $R = -1$

$$p' = 0$$

$$\rho c = 1000 \cdot 1500 \approx 1.5 \cdot 10^6 \text{ кг / м}^2 \cdot \text{с}$$

вода

отражение $R = 1$

$$w' = 0 \quad \text{или} \quad \partial p' / \partial z = 0$$

$$\rho c = 3000 \cdot 4000 \approx 12 \cdot 10^6 \text{ кг / м}^2 \cdot \text{с}$$

дно

Граничные условия (2)

$$\rho c = 1.26 \cdot 340 \approx 430 \text{ кг / м}^2 \cdot \text{с}$$

воздух

отражение $R = -1$

$$p' = 0$$

$$\rho c = 1000 \cdot 1500 \approx 1.5 \cdot 10^6 \text{ кг / м}^2 \cdot \text{с}$$

вода

преломление $R < 1$

$$w_1 = w_2, \quad p_1 = p_2$$

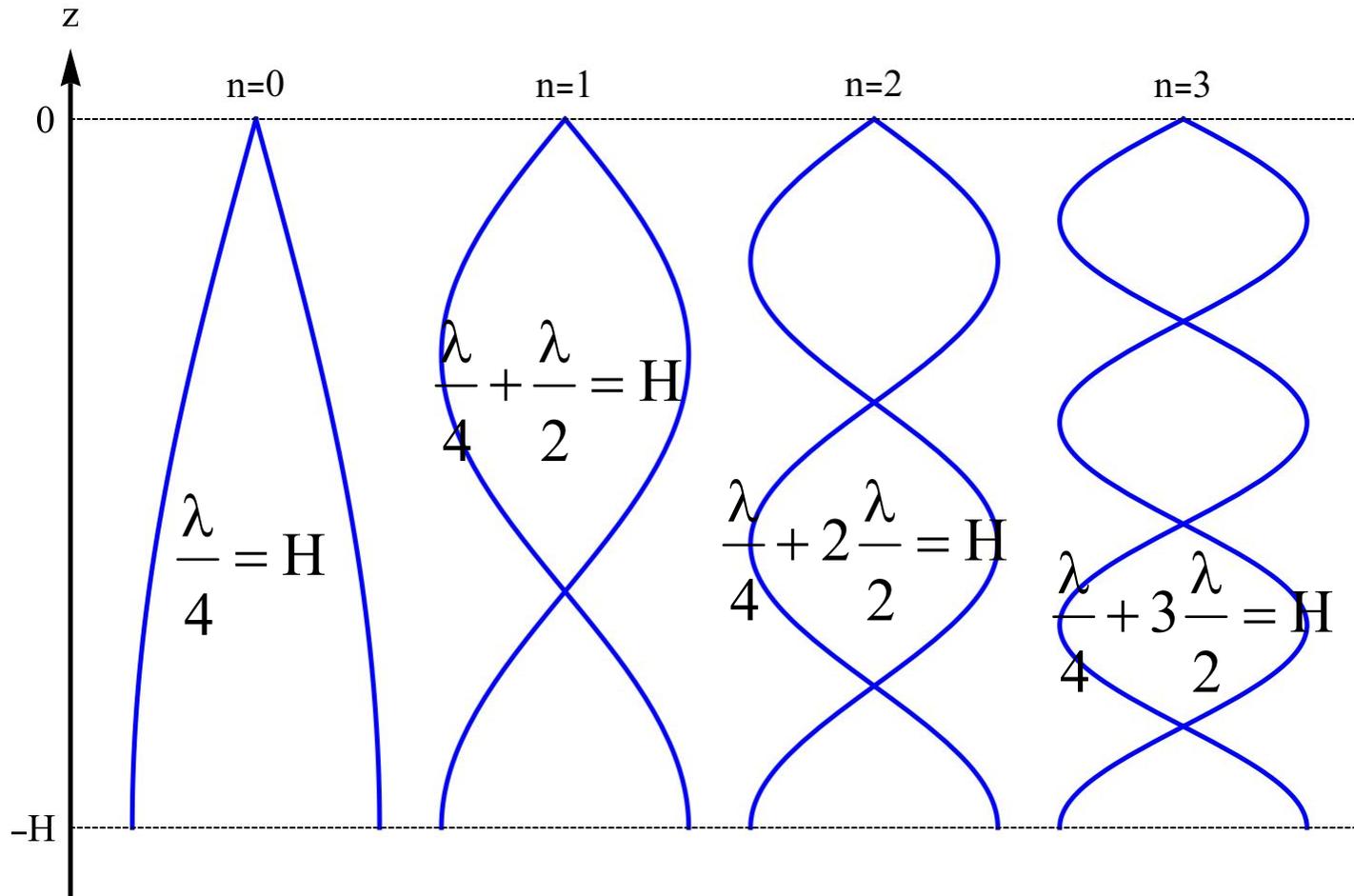
$$\rho c = 3000 \cdot 4000 \approx 12 \cdot 10^6 \text{ кг / м}^2 \cdot \text{с}$$

дно

Сжимаемый океан как волновод

$$p' = \sum_n A^n \sin(k_z^n z)$$

$$k_z^n = \frac{\pi(1+2n)}{2H}$$



$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} \right) = 0$$

$$p'(x, z, t) = p_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_z z)}$$

$$\omega^2 / c^2 = k_x^2 + k_z^2$$

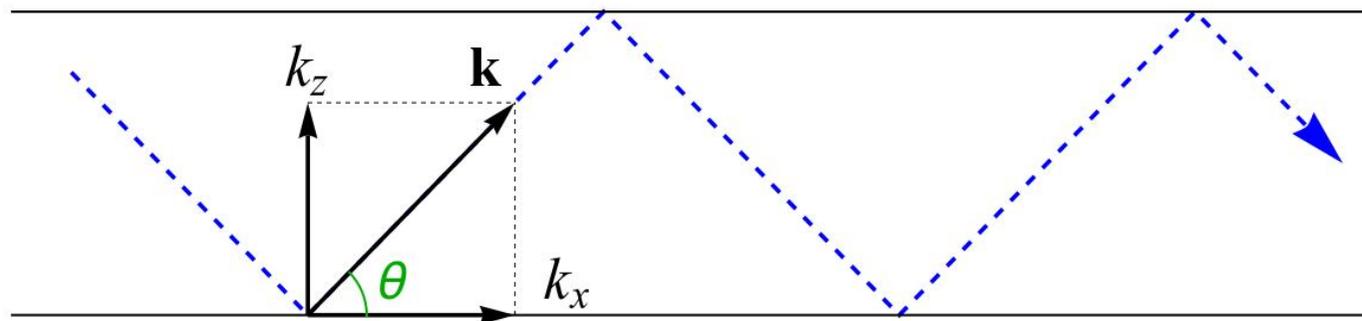
$$k_x = \sqrt{\omega^2 / c^2 - (k_z^n)^2} = \sqrt{\omega^2 / c^2 - \frac{\pi^2 (1 + 2n)^2}{4H^2}}$$

$$\omega_{\min} = \frac{\pi c}{2H} \quad T_{\max} = \frac{4H}{c} \quad \lambda_{\max} = 4H$$

$$\omega = c\sqrt{k_x^2 + (k_z^n)^2} \quad - \text{дисперсионное соотношение}$$

$$C_{\text{фаз}} \equiv \frac{\omega}{k_x} = c\sqrt{1 + (k_z^n / k_x)^2} = \frac{c}{\cos \theta}$$

$$C_{\text{гр}} \equiv \frac{d\omega}{dk_x} = \frac{c}{\sqrt{1 + (k_z^n / k_x)^2}} = c \cdot \cos \theta$$



Скорость звука в воде

$$c = c(T, S, p)$$

эмпирическая
зависимость

TEOS-10
www.teos-10.org

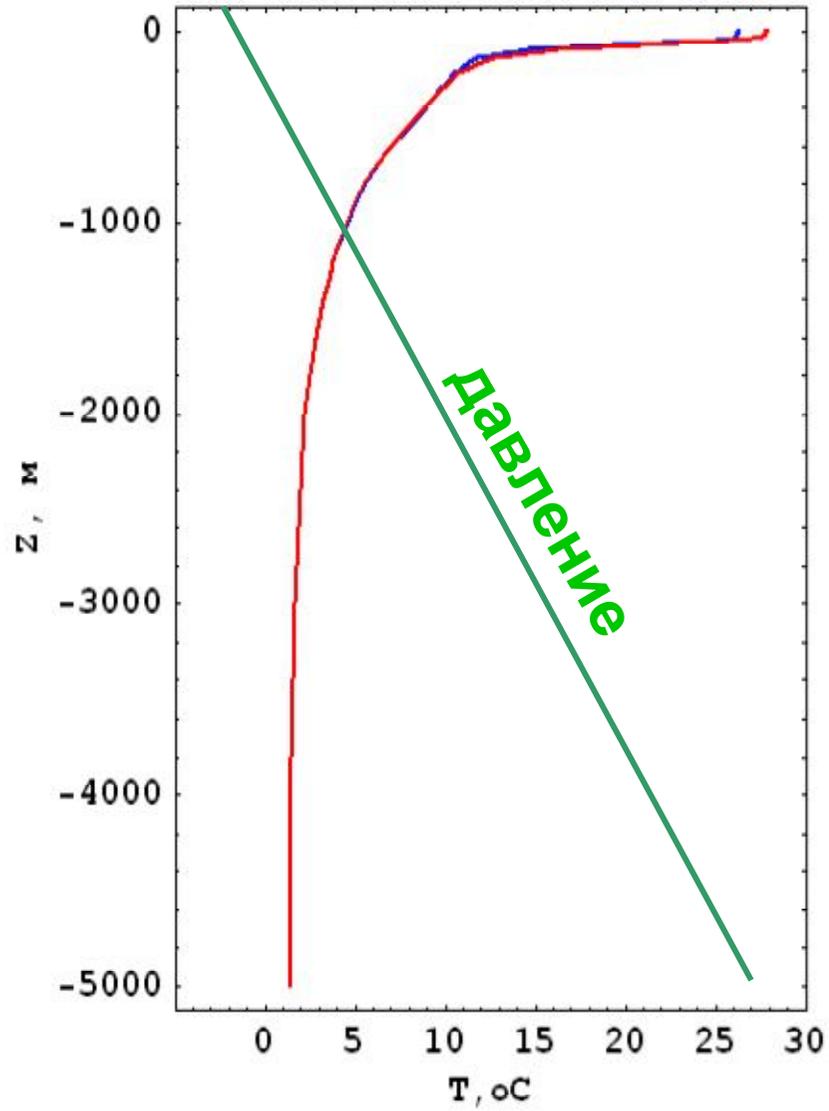
$$1480 < c < 1545 \text{ м/с}$$

$$\frac{\partial c}{\partial T} > 0$$

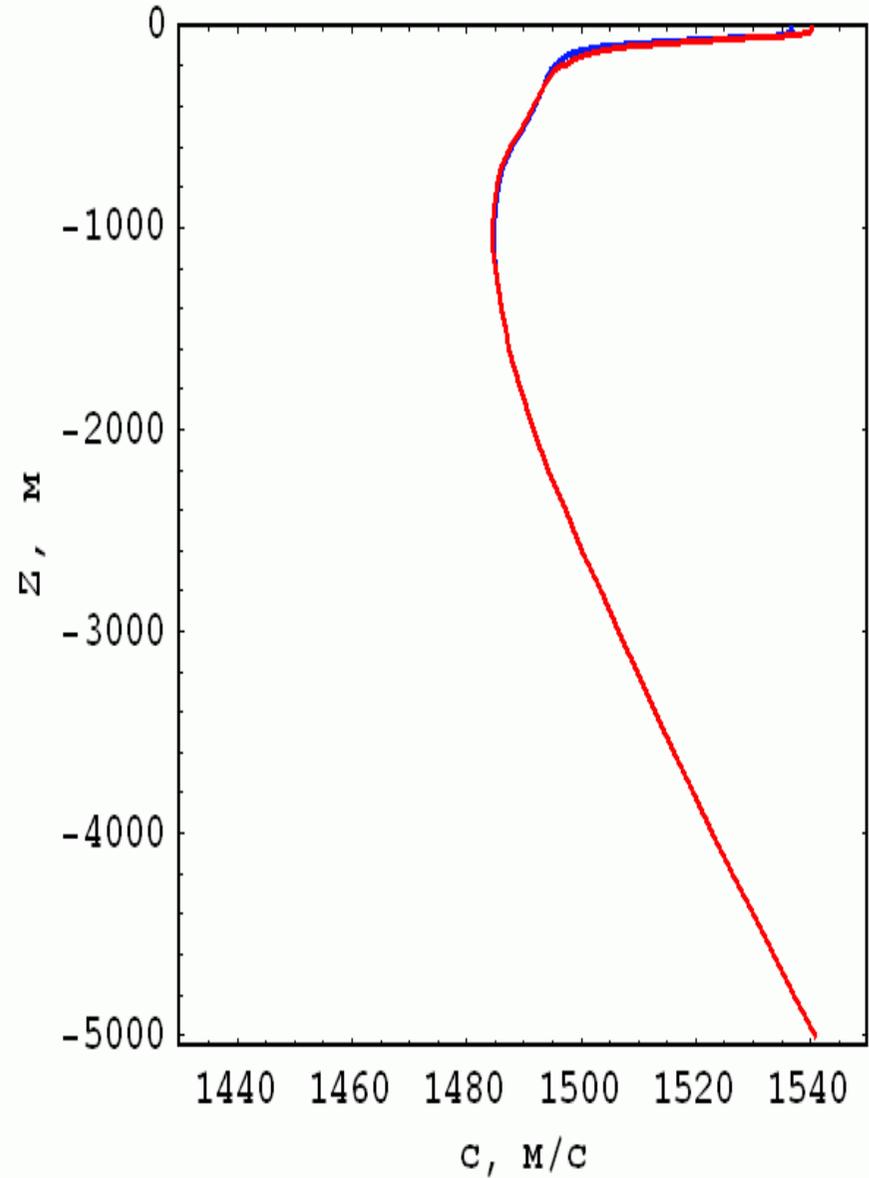
$$\frac{\partial c}{\partial p} > 0$$

Lat=10 Lon=-150

Температура



Скорость звука



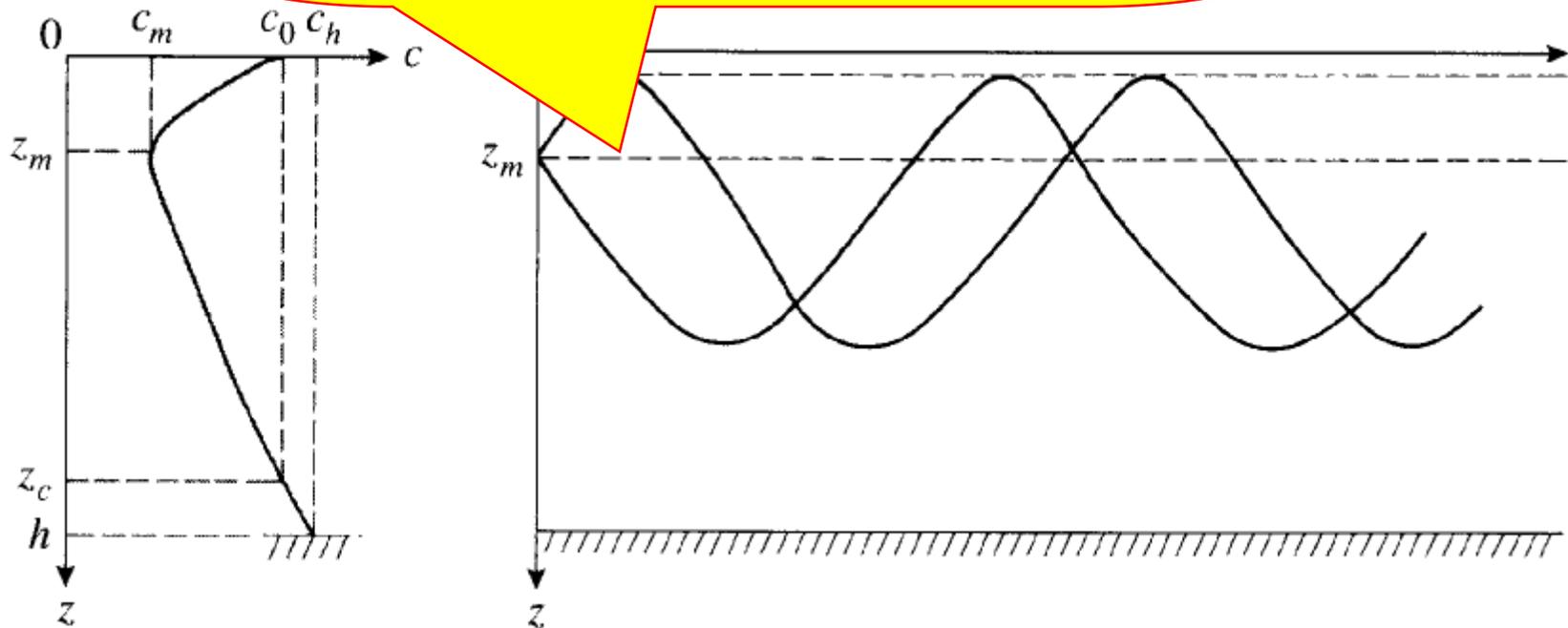
Подводный звуковой канал (ПЗК)

Deep Sound Channel

SOFAR Channel

(Sound Fixing and Ranging)

Ось ПЗК обычно лежит на
глубине ~ 1000 м



Подводный звуковой канал (ПЗК)

D
S
(S

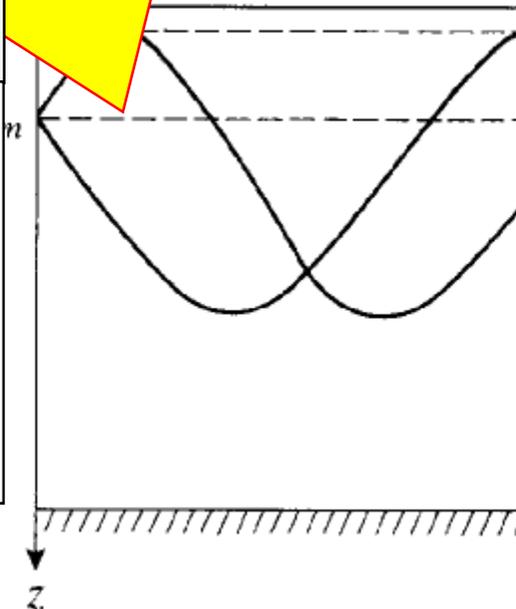


**William Maurice
Ewing**
1906 – 1974
american geophysicist and
oceanographer



nging)

ПЗК обычно лежит на
глубине ~1000 м



**Леонид
Максимович
Бреховских**
1917-2005
выдающийся учёный
в области физики,
акустики океана,
академик АН СССР

Прикладная гидроакустика

- **Акустический радар (сонар)**
- **Подводная связь (передача информации)**
- **Подводная навигация**
- **Наблюдения за погодой и климатом (регистрация шумов от ветра или осадков, акустическая термометрия)**
- **Измерение скорости течения (ADCP)**
- ...

Элементы

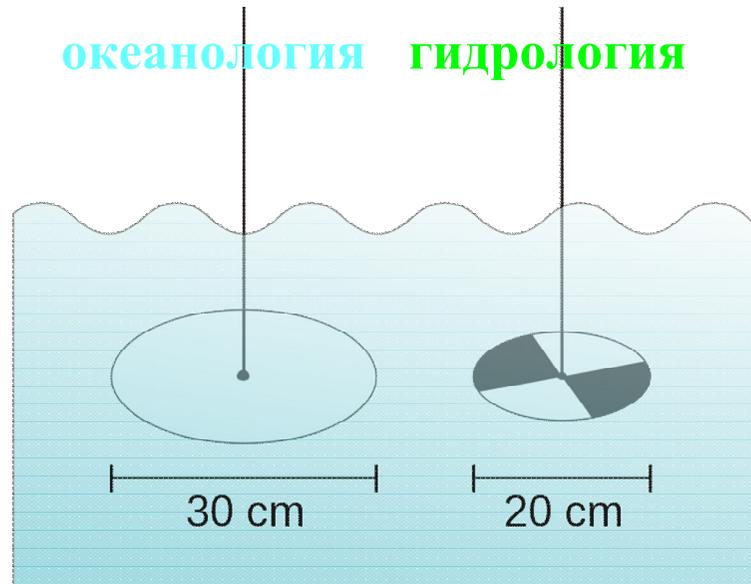
оптики

океана

Задачи оптики океана:

- Распространение электромагнитного излучения видимого диапазона (380-780 нм) в морской воде, уравнение переноса излучения;
- Оптические свойства морской воды (чистой, чистой морской, с добавлением взвеси и в т.ч. органического вещества - «желтого вещества»). Преломление, рассеяние, и поглощение света морской средой, флуоресценция;
- Видимость под водой и через поверхность моря. Цвет моря и вод суши;
- Подводная облученность и фотосинтетическая активность, их пространственная и временная изменчивость;
- Дистанционное зондирование морской среды (активное и пассивное) с судов, летательных аппаратов и из Космоса. Атмосферная коррекция спутниковых данных;
- ...

Измерения прозрачности морской воды (диск Секки - Secchi Disk)



Статью по исследованию прозрачности Лигурийского и Адриатического морей А.Секки опубликовал 1865 году в научном журнале *Il Nuovo Simento*



аббат Анджело Секки
1818 — 1878

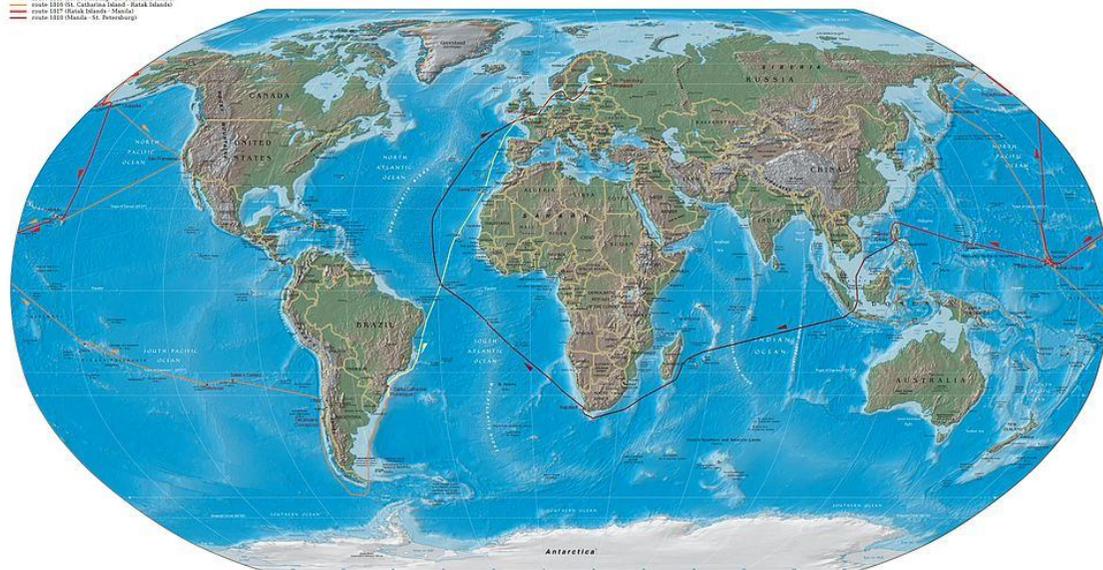
директор обсерватории
папского Григорианского
университета, «отец
астрофизики»

Измерения прозрачности морской воды (до появления диска Секки)

Кругосветное плавание в 1815–1818 годах брига «Рюрик» под командованием лейтенанта Отто Коцебу

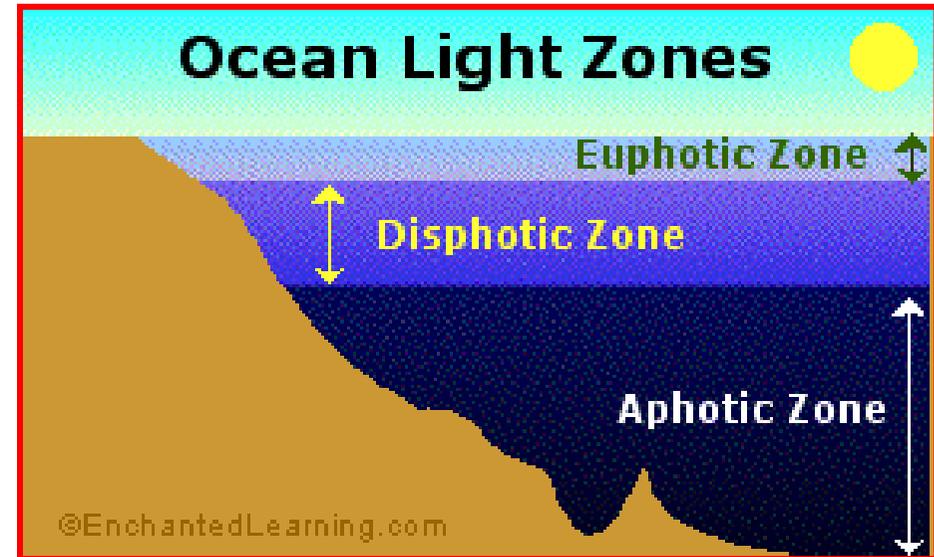
Rurik-Expedition (1815 - 1818)
Based on a physical map of the world of Apr 2004

• anchorages
— route 1815 (St. Petersburg - St. Catharina Island)
— route 1816 (St. Catharina Island - Rurik Island)
— route 1817 (Rurik Island - Manila)
— route 1818 (Manila - St. Petersburg)



...использовалась белая тарелка с камбуза.

Прозрачность воды определяет толщину **фотической** зоны, в которую проникает солнечная радиация. В этой зоне эффективен процесс фотосинтеза (до 200 м).



Ниже расположена **дисфотическая** (сумеречная) зона, в которой все еще возможен фотосинтез (до 1000 м).

Ниже дисфотической зоны расположена **афотическая** зона, в которой фотосинтез невозможен.

Закон Бугера (1729 г.)

$$dI = -\sigma I dx$$

показатель
ослабления

$$I(x) = I_0 e^{-\sigma \cdot x}$$

В атмосфере и в океане

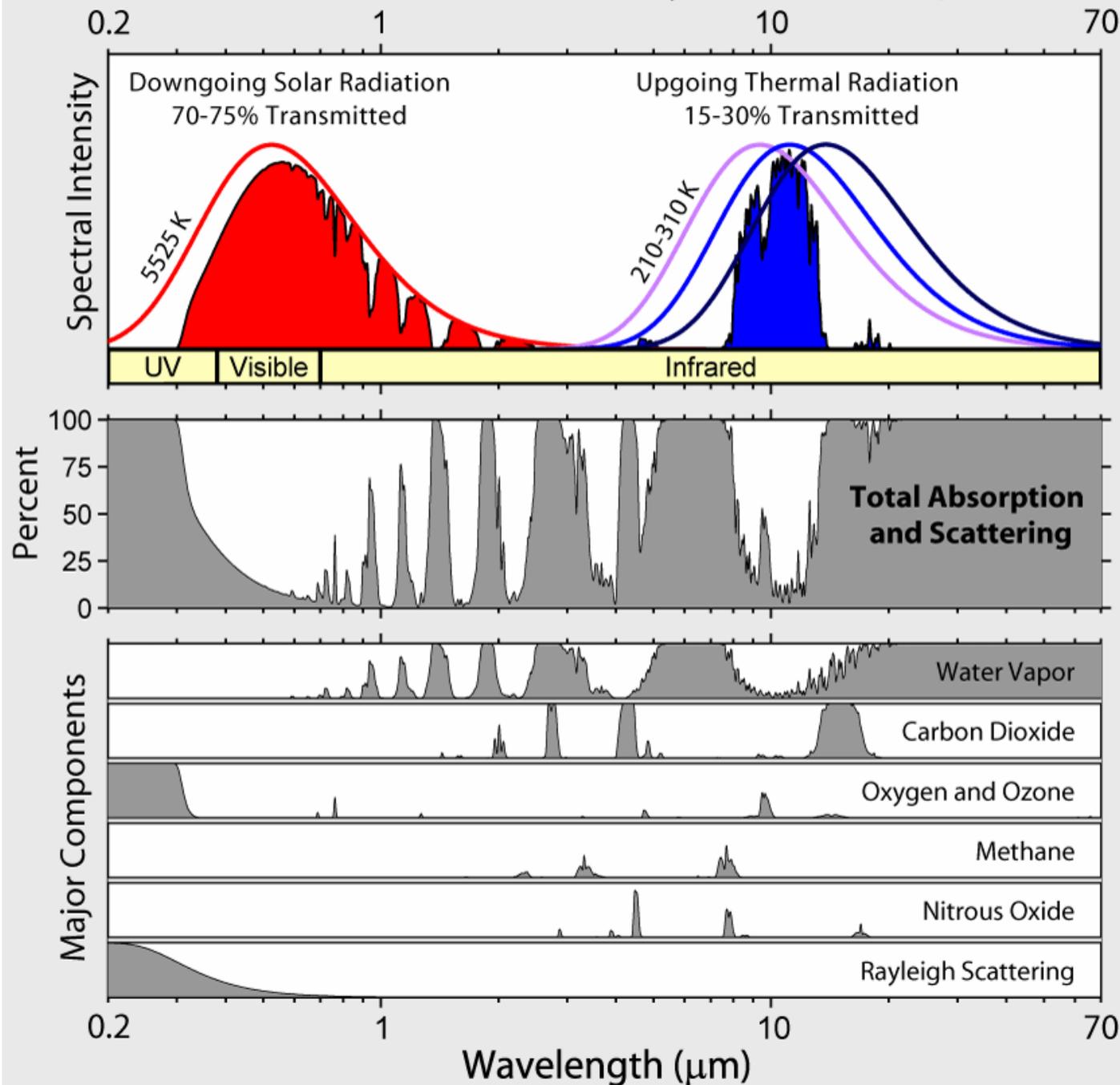
$$\sigma = \sigma(\lambda)$$



Pierre Bouguer
1698-1758

French
mathematician,
geophysicist,
geodesist, and
astronomer

Radiation Transmitted by the Atmosphere



Нормированные
спектры
излучения
Солнца и Земли

Спектр
поглощения
атмосферы

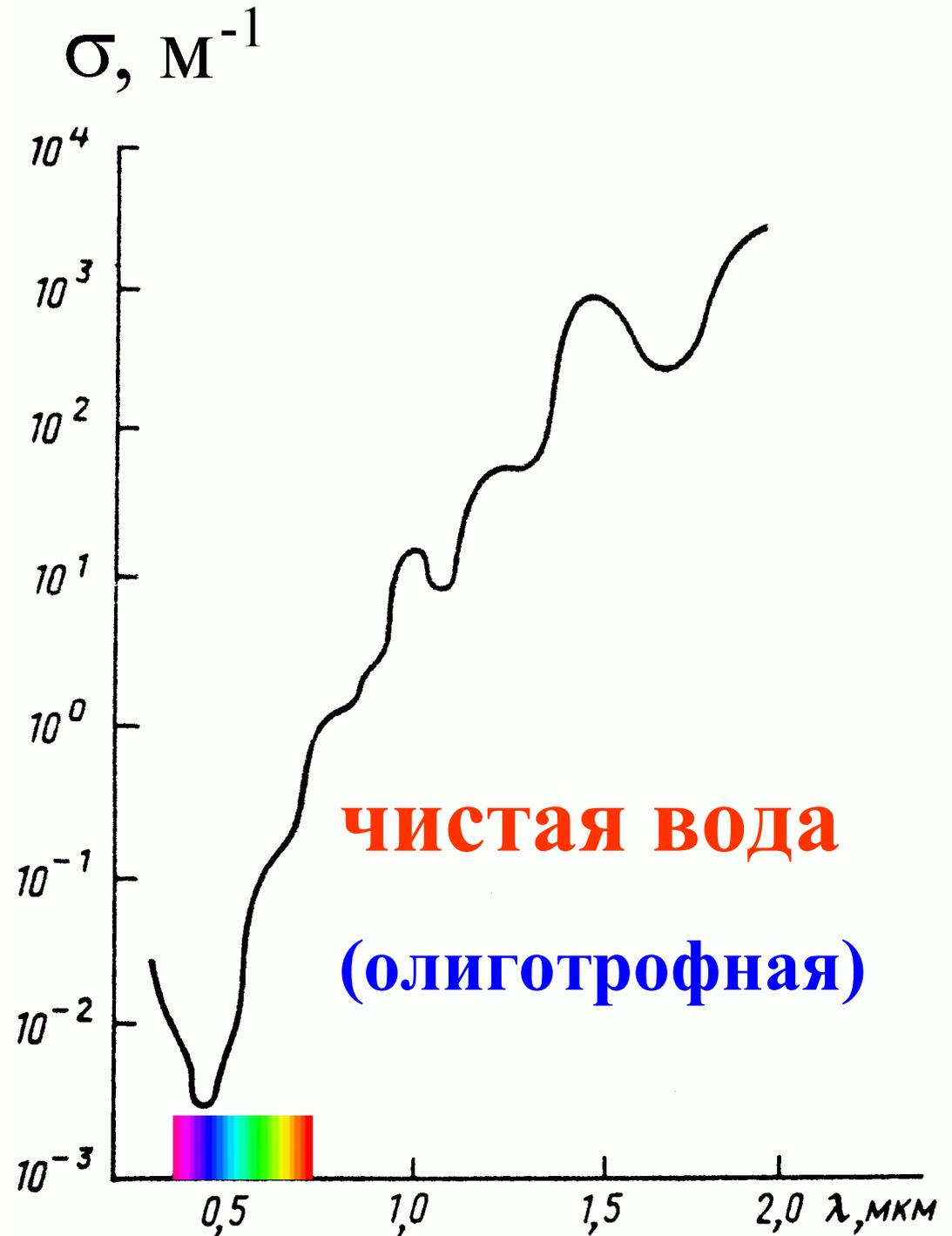
водяной пар
углекислый газ
кислород и озон
метан
закись азота

Коэффициент
ослабления для
морской воды

$$I(x) = I_0 e^{-\sigma x}$$

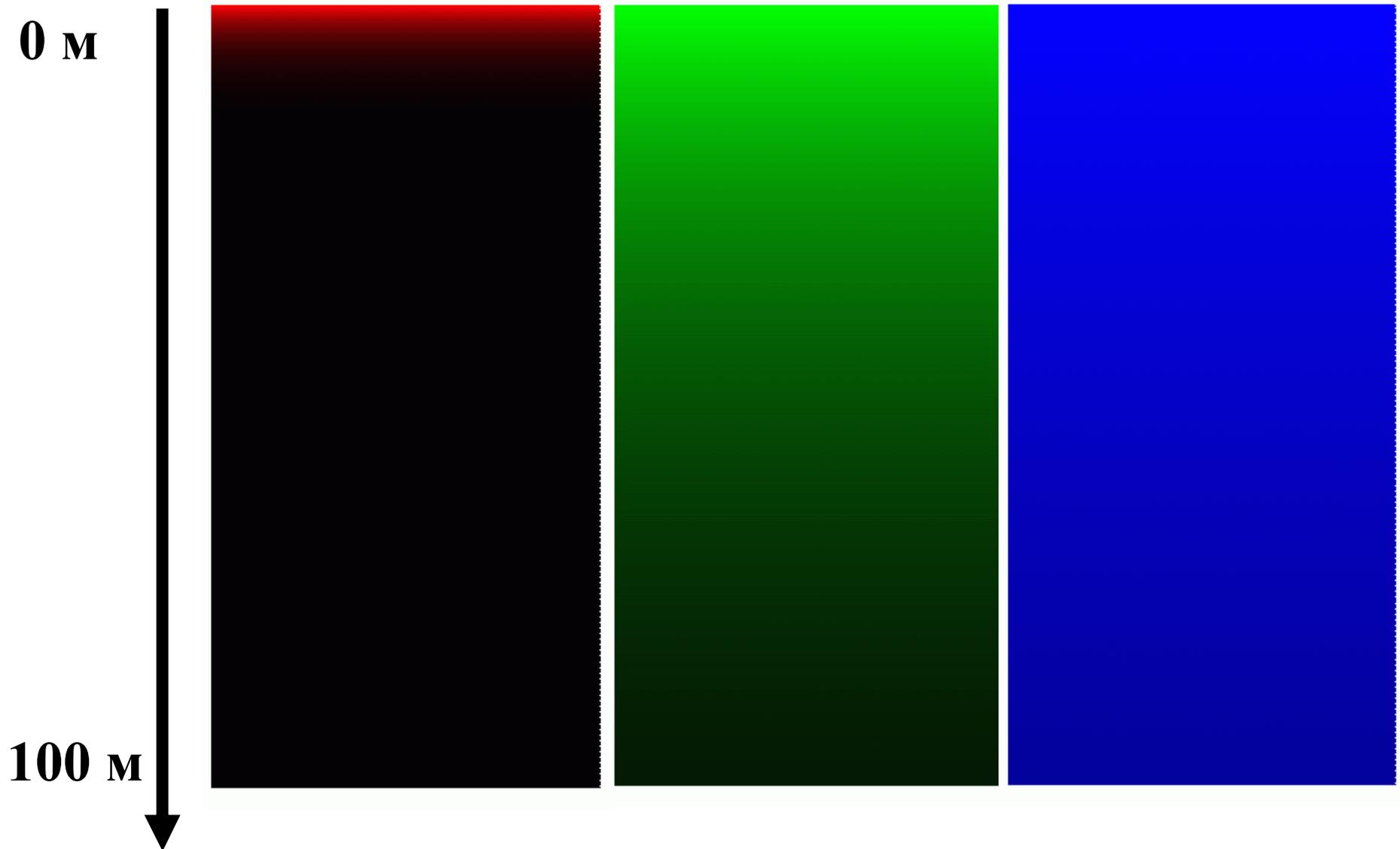
$$\sigma = \sigma(\lambda)$$

наличие
желтого вещества
меняет вид
зависимости

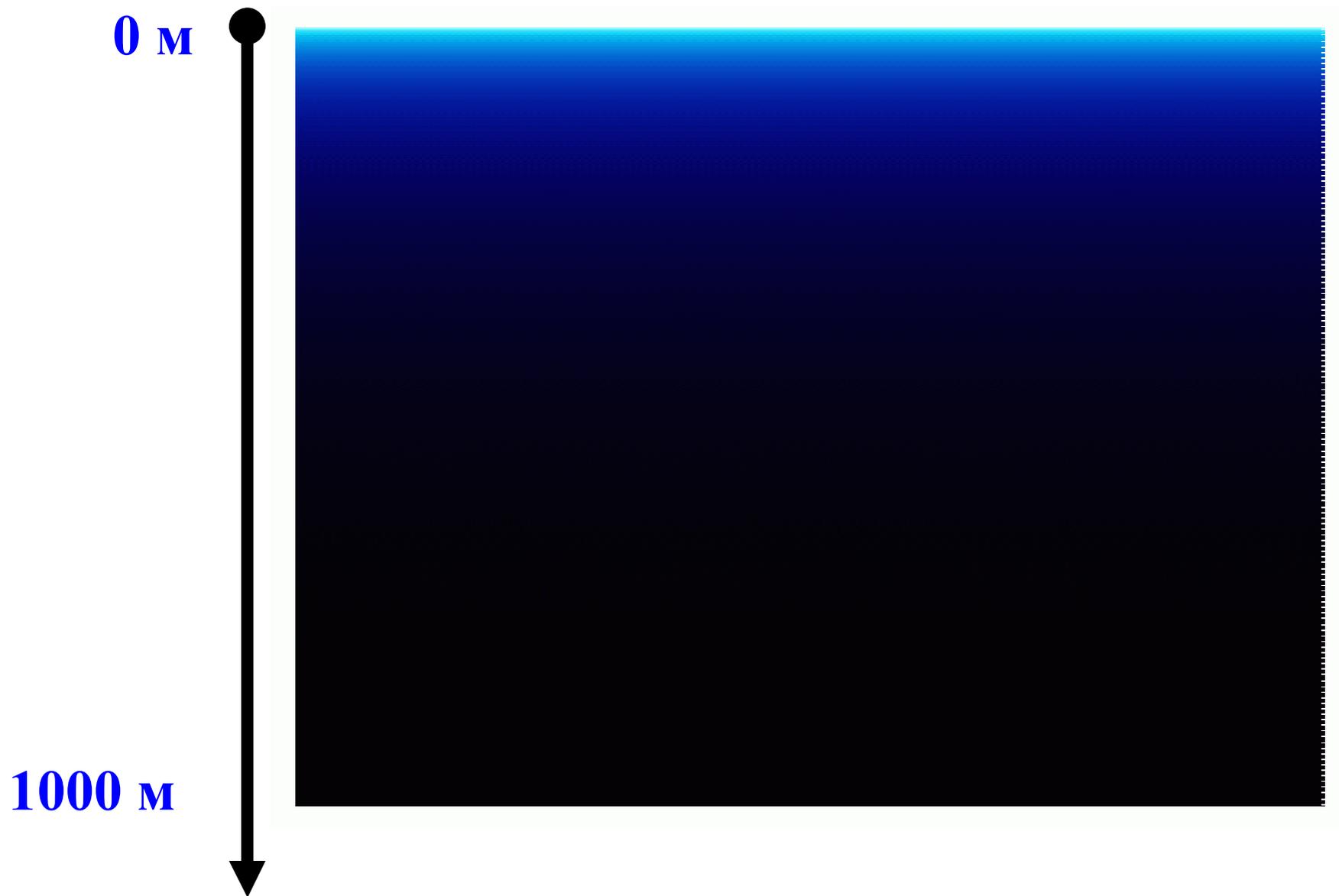


Ослабление света с глубиной в чистой воде

$$\sigma=0.27 \text{ м}^{-1} \quad \sigma=0.023 \text{ м}^{-1} \quad \sigma=0.005 \text{ м}^{-1}$$



Ослабление света с глубиной в чистой воде

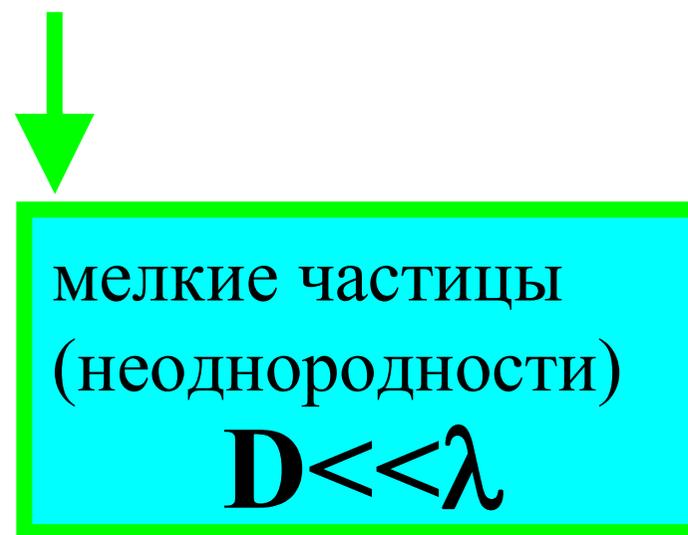


Ослабление электромагнитного излучения есть следствие факторов:

1. Поглощения (переход энергии в тепло)
2. Рассеяния («переизлучения»)



рассеяние Ми

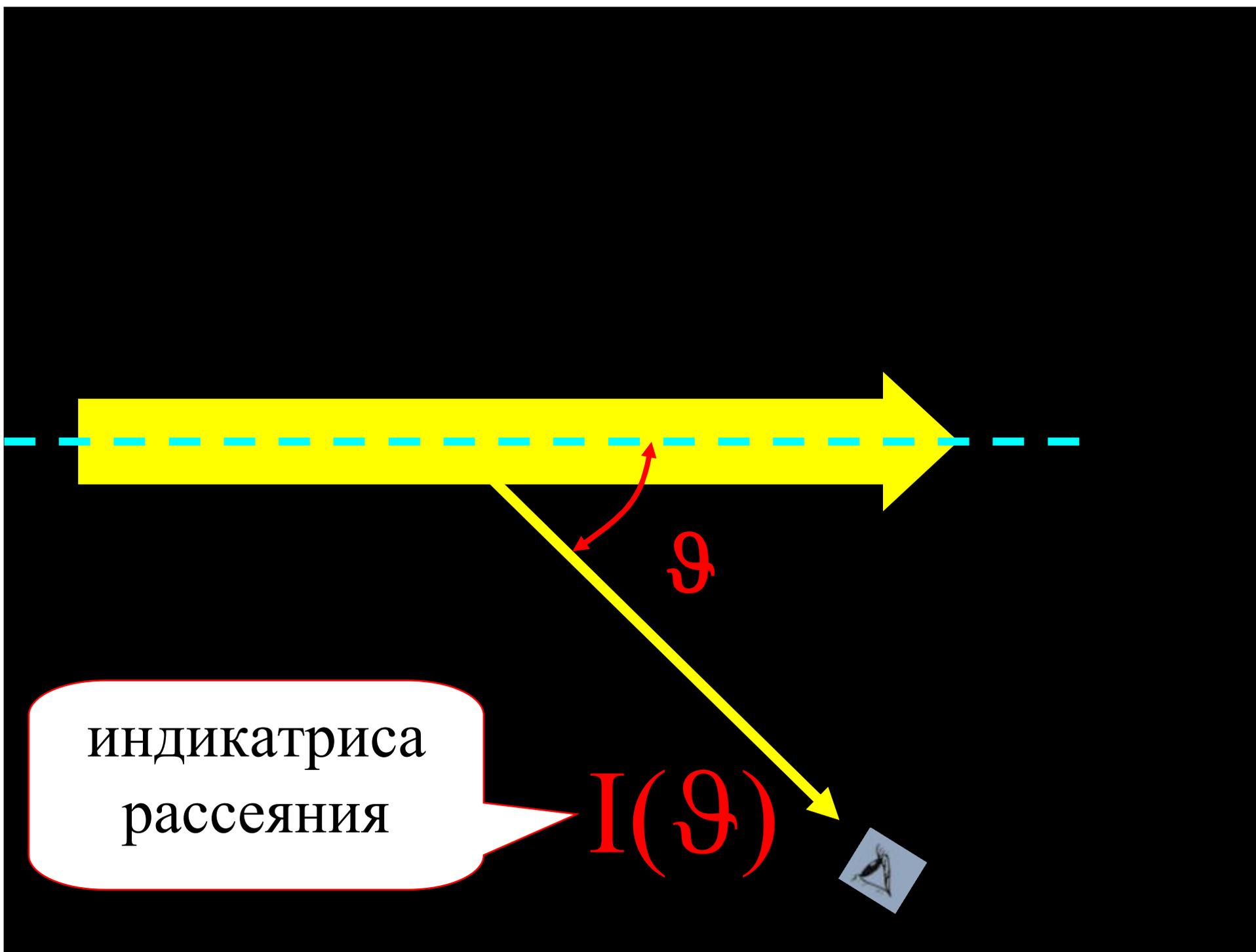


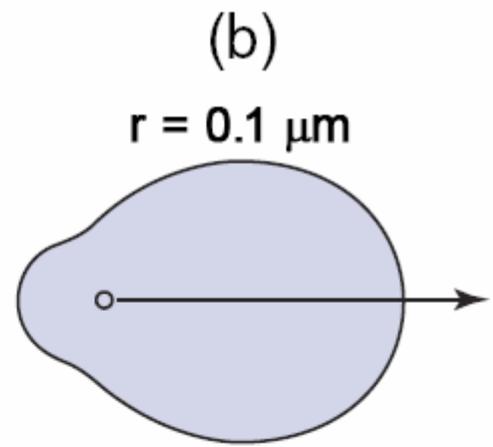
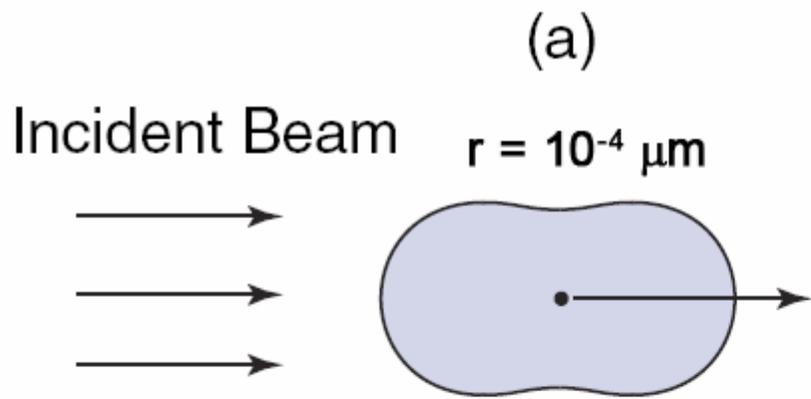
рассеяние Рэля
или молекулярное

индикатриса
рассеяния

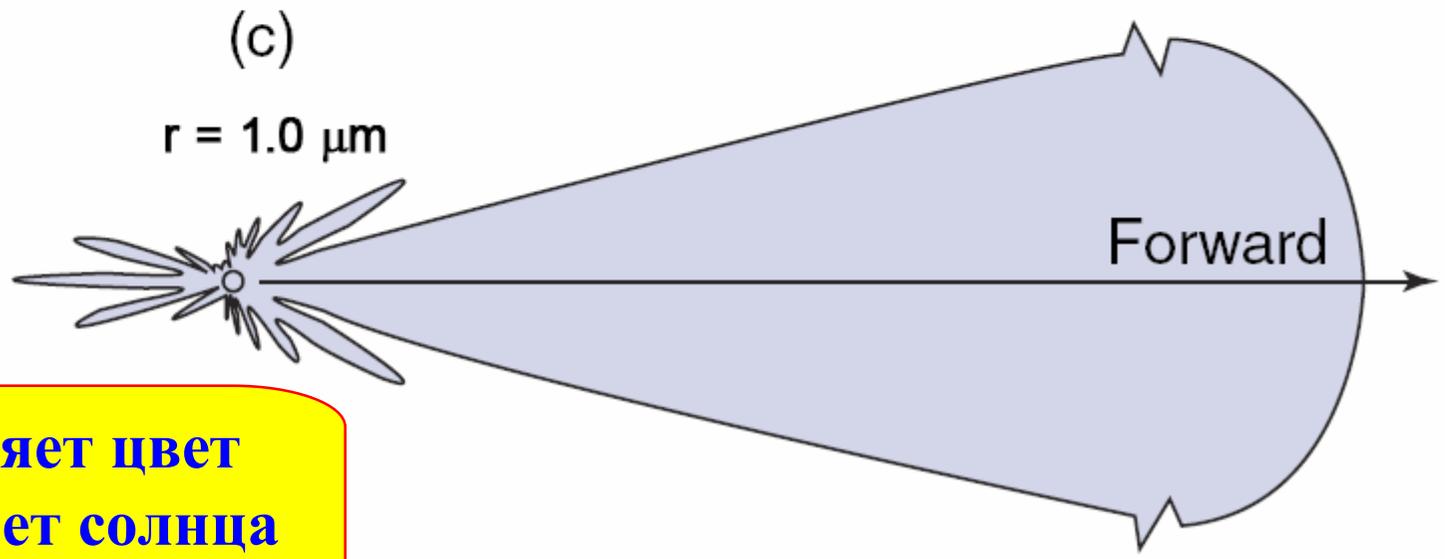
$$I(\vartheta)$$

ϑ





$$I \sim \frac{1}{\lambda^4} [1 + \cos^2 \vartheta]$$

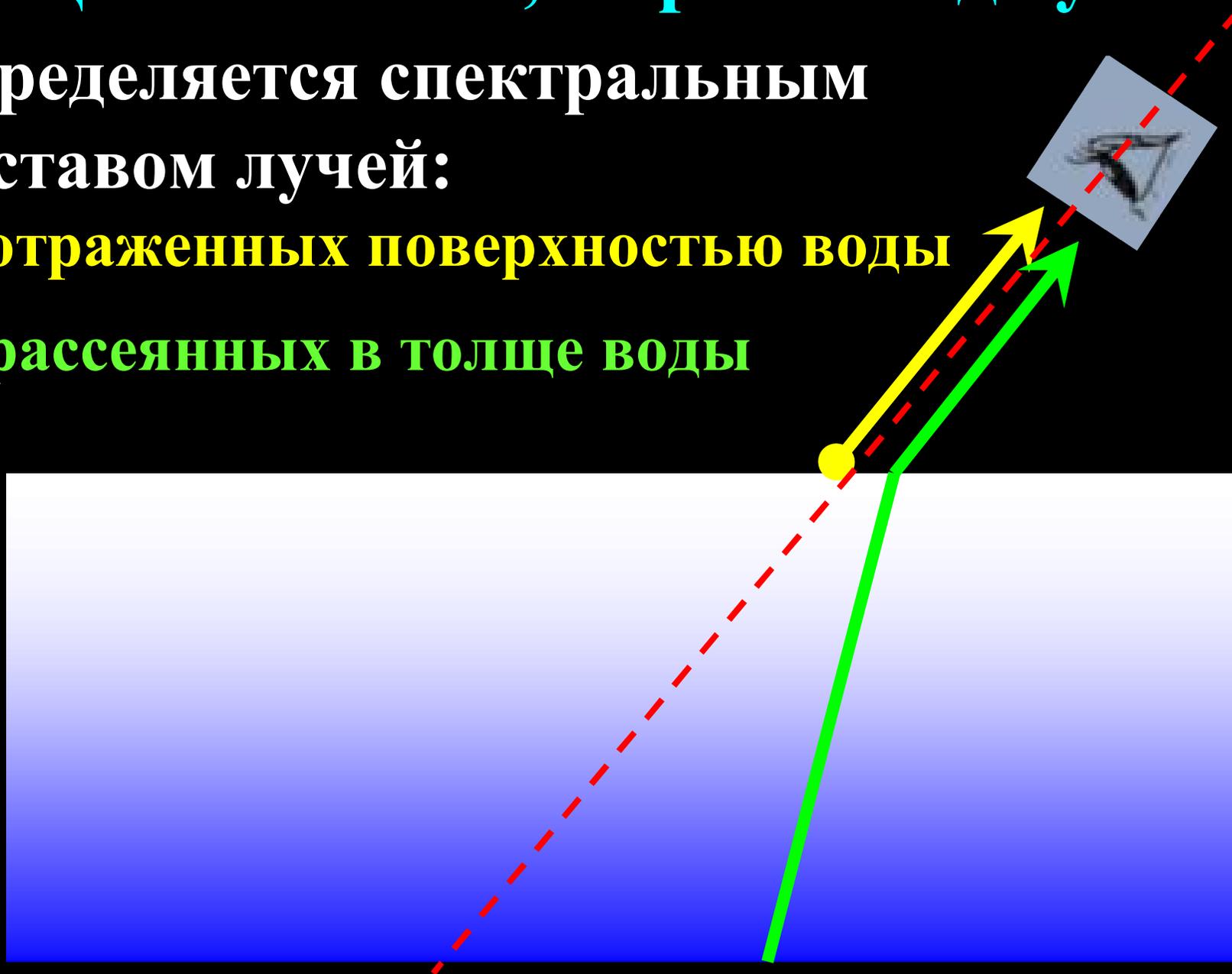


**определяет цвет
неба и цвет солнца
на закате**

Цвет океанов, морей и вод суши

определяется спектральным составом лучей:

1. отраженных поверхностью воды
2. рассеянных в толще воды



Коэффициент отражения неполяризованного излучения на границе «воздух-вода» как функция угла падения









