СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНОЕ ДИПОЛЬНОЕ ЦУНАМИ, БЕГУЩЕЕ ПО ШЕЛЬФУ

С.А. Арсеньев[1], Л.В. Эппельбаум[2]

[1]Институт физики Земли имени О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва
[2]Тель Авивский университет, факультет точных наук, г. Тель Авив, Израиль

Arrsenyev@yandex.ru

Рассмотрим задачу о распространении цунами по шельфу с грубой шероховатостью.
В этом случае донным трением пренебрегать нельзя, причем при больших скоростях течения в волне необходимо решать уравнение с квадратичным донным трением. Найдём решение этого нелинейного уравнения. Для этого рассмотрим процесс распространения цунами по шельфу, пренебрегая нелинейными ускорениями. Они могут играть важную роль в районе прибрежного мелководья, где глубины падают до 10 метров и менее. На самом же шельфе глубины имеют порядок сотен метров и этими ускорениями в первом приближении можно пренебречь

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{g^2 f}{c^4} \frac{\partial S^2}{\partial t} = 0 \quad . \qquad (1.5.26)$$

Мы опустили также горизонтальное турбулентное трение, считая, что доминирующим является более сильное трение о шероховатое дно. В уравнении S – полный поток, c = g (H-z_0) – Лагранжева скорость длинных волн, H – средняя глубина шельфа, z_0 – высота выступов шероховатости на дне, f – коэффициент сопротивления, который можно вычислить по формуле

$$f = \frac{\kappa^2 (1-n)^3}{\{\ln[\, 1 / (1-\sqrt{1-n}\,)] - \sqrt{1-n} - \frac{1}{2}\sqrt{(1-n)^2} - \frac{1}{3}\sqrt{(1-n)^3}\,\}^2} \quad ,$$

n = z_0 /H – относительная шероховатость и κ - постоянная Кармана.

Решение уравнения (1.5.26) ищем в виде бегущей волны **B = x – Vt**, где **V** – скорость прогрессивной волны. Таким образом, мы считаем полный поток и уровень функциями бегущей координаты **B**, которая в свою очередь зависит от координат **x** и **t**. Фактически мы ищем *автомодельное* решение, в котором форма волны вследствие самоорганизации сохраняет свою форму при распространении по шельфу. Автомодельность - это ценное свойство, потому что она позволяет свести дифференциальное уравнение в частных производных (1.5.26), в котором функция **S** зависит от двух переменных **x** и **t**, к обыкновенному дифференциальному уравнению, в котором неизвестная функция зависит только от одной переменной **B**. Из уравнения неразрывности находим связь полного потока и уровня: **S = - V ζ**. Подставляя её в (1.5.26), получим

$$\frac{\partial^2 \varsigma}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \varsigma}{\partial x^2} - \frac{g^2 V f}{c^4} \frac{\partial \varsigma^2}{\partial t} = 0 \quad . \qquad (1.5.27)$$

Вычислим производные: $\partial\zeta/\partial t = d\zeta/dB*(\partial B/\partial t) = (-V)d\zeta/dB$, $\partial^2\zeta/\partial t^2 = V^2 d^2\zeta/dB^2$, $\partial\zeta/\partial x = d\zeta/dB*(\partial B/\partial x) = d\zeta/dB$, $\partial^2\zeta/\partial x^2 = d^2\zeta/dB^2$, $\partial\zeta^2/\partial t = 2\zeta\,\partial\zeta/\partial t = 2\zeta(-V)d\zeta/dB = (-V)\,d\zeta^2/dB$. Уравнение (1.5.27) принимает вид

$$V^2 \frac{d^2 \varsigma}{d B^2} - c^2 \frac{d^2 \varsigma}{d B^2} + \left(\frac{g^2 V^2 f}{c^4}\right) \frac{d \varsigma^2}{d B} = 0$$

Отсюда, интегрируя по **dB** , получим

$$\left(1 - \frac{c^2}{V^2}\right) \frac{d \varsigma}{d B} + \frac{g^2 f}{c^4} \varsigma^2 = 0 \qquad (1.5.28)$$

и мы полагаем постоянную интегрирования, не зависящую от **B**, равной нулю.

В уравнении (1.5.28) переменные разделяются

$$\frac{d \varsigma}{\varsigma^2} = -\left(\frac{g^2 f}{c^4}\right)\left(1 - \frac{c^2}{V^2}\right)^{-1} dB \, .$$

Интегрируя это выражение по $d\zeta$ от ζ_0 при **B = 0** (**x = 0, t = 0**) до текущего уровня ζ, получим

$$\varsigma = \frac{\varsigma_0}{1 + (B/\Delta)} \quad . \qquad (1.5.29)$$

Здесь введена ширина бегущей волны, имеющая размерность длины

$$\Delta = \frac{c^4\left(1 - c^2/V^2\right)}{g^2 f \varsigma_0} \qquad (1.5.30)$$

Существенно, что $V \neq c$, так как при $V = c$ из (1.5.28) имеем одно тривиальное решение ζ

$= \mathbf{0}$, которое интереса не представляет.

В качестве примера рассмотрим сильно шероховатый шельф, покрытый крупными скальными выступами и рифами с $\mathbf{n = 0{,}7}$. При глубине шельфа $\mathbf{H = 200}$ м высота выступов шероховатости $\mathbf{z_0 = nH = 140}$ м. Из открытого океана на шельф набегает длинная волна цунами с начальной амплитудой $\boldsymbol{\zeta_0} = \mathbf{1}$ м. Мы встречаем эту волну на расстоянии **1000** м от внешней, океанской границы шельфа, где $\mathbf{x = 0, t = 0, \zeta = \zeta_0}$. Ось $\mathbf{x}$ направлена вдоль распространения волны к берегу.

На рисунке 1.5.7 показан расчёт прибытия волны цунами в точку наблюдений. Скорость распространения волны $\mathbf{V}$ выбрана равной $(\mathbf{1{,}41})\ \mathbf{c}$. Коэффициент сопротивления $\mathbf{f}$ рассчитан по приведенной формуле, в которой постоянная Кармана $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0{,}4}$. Лагранжева скорость распространения линейных длинных волн $\mathbf{c}$ вычислена с помощью формулы $c = g\ (H\text{-}z_0)$, а ширина $\boldsymbol{\Delta}$ - по формуле (1.5.30). Как видим, нелинейная волна имеет форму *диполя* с двумя полюсами – положительным возвышением уровня, которое соседствует с отрицательным возвышением уровня. Оба полюса *дипольной волны* распространяются с одинаковой скоростью $\mathbf{V}$, в противном случае они аннигилируют и волна исчезает.

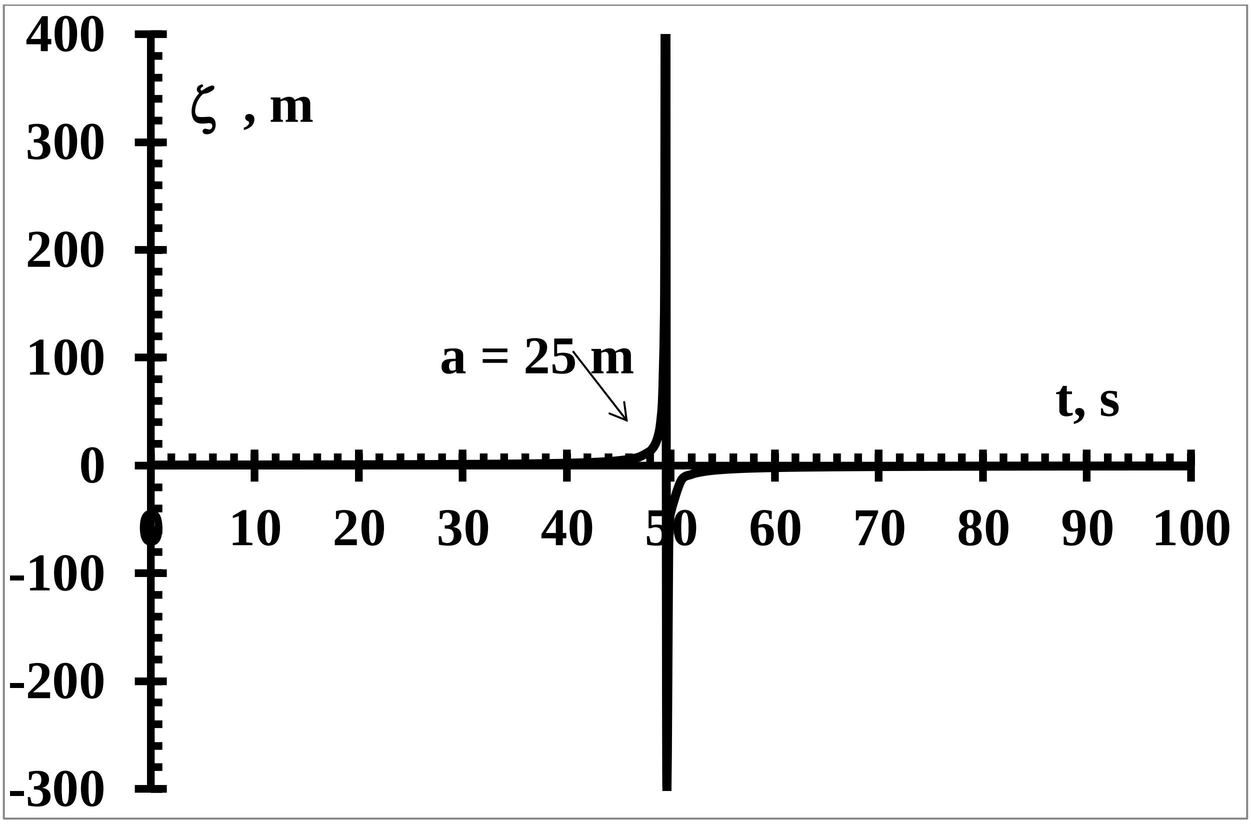

Рисунок 1.Расчёт дипольной волны цунами по формуле (1.5.29):

H = 200 м, n = 0,7, V = 1,41 с, Δ = 699 м, $\boldsymbol{\zeta_0}$ = 1 м.

Амплитуда дипольной волны является очень большой, поэтому она неустойчива и разрушается. Процесс обрушения гравитационных волн на воде изучался еще в XIX веке Рэлеем, Стоксом и Мичеллом [Шулейкин,1968]. В частности Мичелл в 1893 году нашел условие, определяющее предельную высоту безветровой волны перед обрушением: $\mathbf{h=(1/7)\ \lambda}$, где $\mathbf{h}$ – высота волны и λ - её длина. Для дипольной волны $\lambda = \Delta/2,$ а амплитуда предельной волны $\mathbf{a = h/2.}$ Следовательно, $\mathbf{a = \Delta/28 \approx 25}$ **м.** Эта предельная амплитуда отмечена на рис.1.5.7 стрелкой. Выше неё волна является обрушенной, то есть реально существовать может только волна с амплитудой **25** метров.

Отметим, что учёт горизонтального турбулентного трения в уравнении (1.5.26) позволяет подавить высокочастотные гармоники, которые делают вершину волны острой и способствуют её неустойчивости. Другими словами горизонтальное турбулентное трение сглаживает волну. Мы не будем останавливаться здесь на соответствующем анализе более полных уравнений.