



Об одном подходе к построению аналитических соотношений для определения характеристик силового воздействия бора и уединённой волны на зафиксированное полупогруженное тело

О.И. Гусев, Г.С. Хакимзянов, В.С. Скиба, Л.Б. Чубаров

Федеральный исследовательский центр информационных и
вычислительных технологий

Новосибирский государственный университет

**V Всероссийская научная конференция
«ВОЛНЫ ЦУНАМИ: МОДЕЛИРОВАНИЕ, МОНИТОРИНГ, ПРОГНОЗ»
Москва, 12-14 ноября 2024 г.**





АКТУАЛЬНОСТЬ

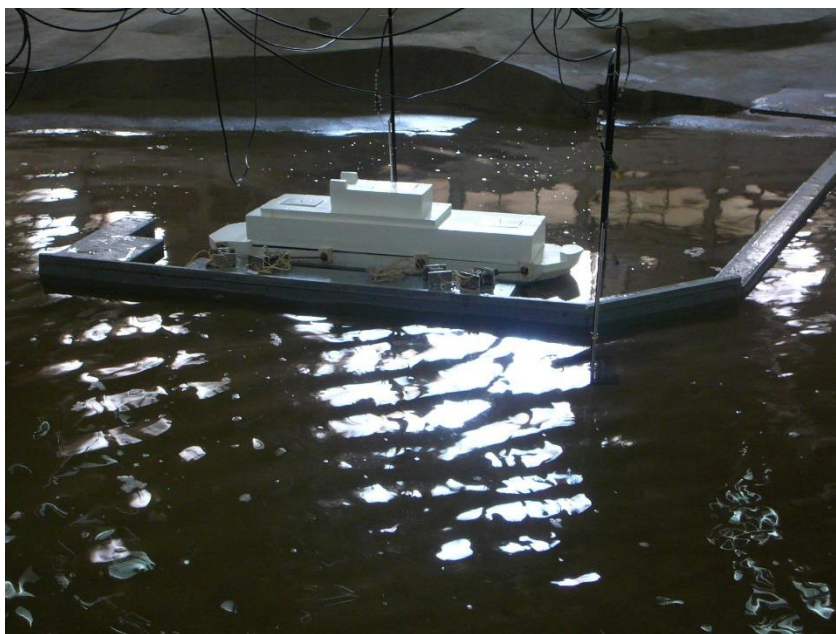
- Плавучие регазификационные платформы
- Морские перегрузочные комплексы СПГ
- Плавучие атомные теплоэлектростанции
- Плавучие доки, понтоны и др.

Конструирование, размещение и эксплуатация высокотехнологичных объектов в прибрежной зоне морей и океанов требует оценок воздействия на них в том числе и длинных поверхностных волн цунами.



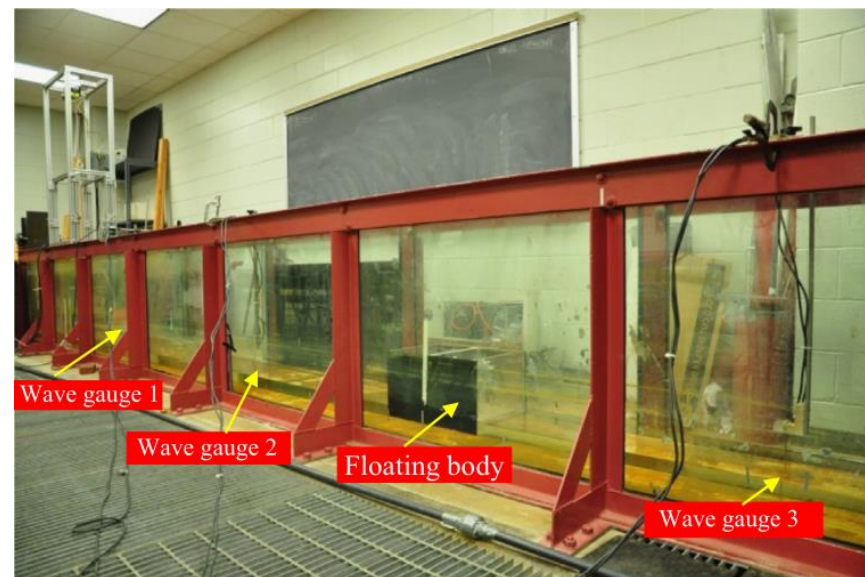


Лабораторное физическое моделирование



Плавучая атомная электростанция, эксперименты в гидроволновом бассейне

Камынин Е.Ю., Максимов В.В., Нуднер И.С., Семёнов К.К., Хакимзянов Г.С. Исследование взаимодействия уединенной волны с частично погруженным неподвижным сооружением // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2010. № 4(10). С. 39-54.



Эксперименты в гидроволновом лотке с телом прямоугольного сечения

Lu X., Wang K.-H. Modeling a solitary wave interaction with a fixed floating body using an integrated analytical–numerical approach // *Ocean Engineering*. 2015. Vol. 109. P. 691–704.



Иерархия моделей

Уравнения Навье-Стокса

учитывается вязкость, трёхмерные



Уравнения Эйлера

модель потенциальных течений, трёхмерные



Дисперсионные модели мелкой воды

второе гидроволновое приближение, плановые

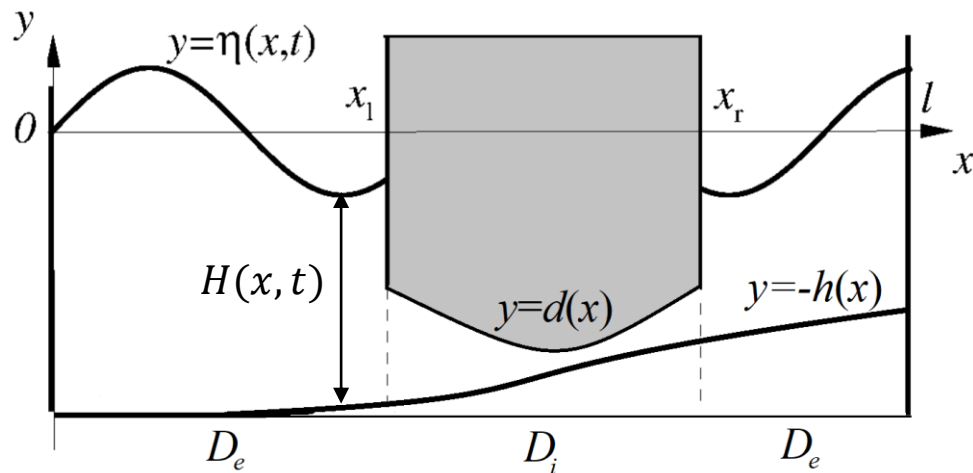


Бездисперсионные модели мелкой воды

первое гидроволновое приближение, плановые



Модели мелкой воды «вне тела»



- Тело считается зафиксированным (заякоренным).
- Течение равномерно по одному из направлений (1D-постановка).

В подобласти **вне тела**

$$H_t + (Hu)_x = 0 \tag{1}$$

$$(Hu)_t + (Hu^2 + p)_x = \check{p}h_x$$

где проинтегрированное по глубине давление $p = g H^2/2 - \varphi$, давление на дне $\check{p} = gH - \psi$,

при этом **дисперсионные** составляющие $\varphi = \frac{H^3}{3}R_1 + \frac{H^2}{3}R_2$ и $\psi = \frac{H^2}{2}R_1 + HR_2$,

$$R_1 = u_{xt} + uu_{xx} - u_x^2, \quad R_2 = D^2(h) = u_t h_x + uu_x h_x - u^2 h_{xx}.$$



Выделение подзадачи для φ в упрощённой постановке

Одномерные линейризованные уравнения в акватории с постоянной глубиной h_0 :

$$\begin{aligned}\eta_t + h_0 u_x &= 0, \\ u_t + g\eta_x &= \frac{h_0^2}{3} u_{xxt}.\end{aligned}$$

Обозначим $\varphi = \frac{h_0^3}{3} u_{xt}$ \Rightarrow $u_t + g\eta_x = \frac{\varphi_x}{h_0}$ \Rightarrow $\varphi_{xx} - \frac{3}{h_0^2} \varphi = gh_0 \eta_{xx}$

$$\begin{cases} \eta_t + h_0 u_x = 0, \\ u_t + g\eta_x = \frac{\varphi_x}{h_0} \end{cases}$$



Для дисперсионной составляющей φ выделяется (без каких-либо дополнительных предположений) уравнение

$$(k\varphi_x)_x - k_0\varphi = F, \quad (2)$$

$$k = \frac{4}{Hr}, \quad k_0 = 6 \frac{\partial k_{01}}{\partial x} + 12k_{00}, \quad k_{01} = \frac{h_x}{H^2 r}, \quad k_0 = \frac{r-3}{H^3 r}, \quad r = h_x^2 + 4,$$

$$F = f_x - \frac{6R}{Hr} + 2u_x^2, \quad R = -g\eta_x h_x + u^2 h_{xx}, \quad f = g\eta_x + \frac{Rh_x}{r}.$$

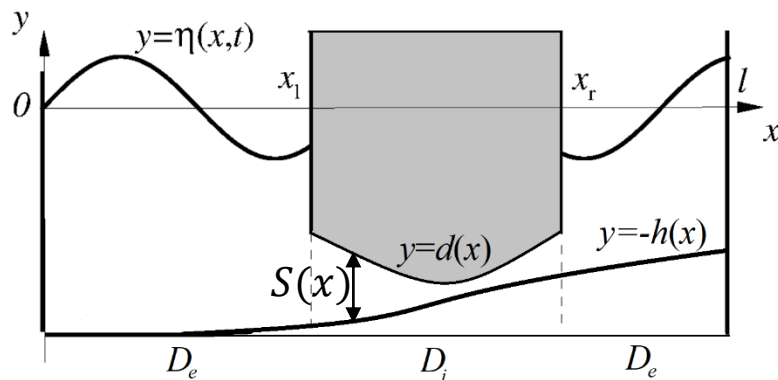
Это уравнение решается при помощи интегро-интерполяционного метода и метода **прогонки** на каждом шаге явной двушаговой схемы типа предиктор-корректор.

$$H_t + (Hu)_x = 0$$

$$(Hu)_t + \left(Hu^2 + \frac{H^2}{2}\right)_x = gHh_x + \varphi_x - \psi h_x \quad (3)$$



Модели мелкой воды «под телом»



В подобласти под телом

$$Q_x = 0, \quad (4)$$

$$u_t + uu_x + \frac{P_x}{S} = \frac{\check{p}}{S} h_x + \frac{\hat{p}}{S} d_x,$$

где $S(x) = h(x) + d(x)$, $Q(t) = S(x)u(x, t)$, $P(x, t)$ - проинтегрированное по толщине слоя давление, $\hat{p}(x, t)$ - давление на днище, $\check{p}(x, t)$ - давление на дне,

$$\hat{p} = \frac{P}{S} + g \frac{S}{2} - \left(\frac{S^2}{6} R_1 + \frac{S}{2} R_2 \right), \quad \check{p} = \frac{P}{S} - g \frac{S}{2} + \frac{S^2}{6} R_1 + \frac{S}{2} R_2.$$

Из системы (4) следует:

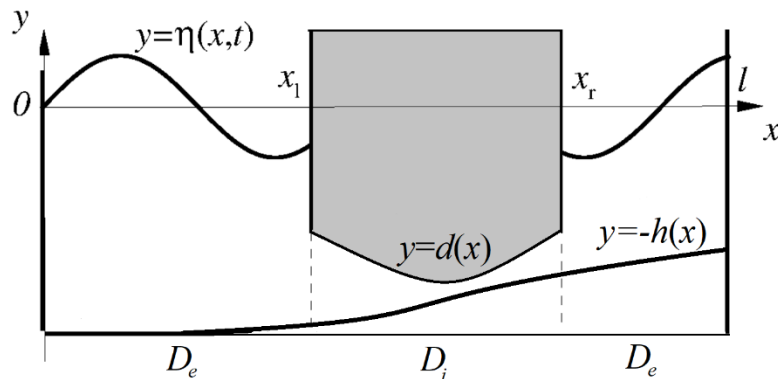
$$I_1 \dot{Q} + I_2 Q^2 + \left(\frac{P}{S} \right) \Big|_{x_l}^{x_r} = I_3, \quad (5)$$

$$I_1 = \int_{D_i} E dx, \quad I_2 = \left(\frac{E}{2S} \right) \Big|_{x_l}^{x_r}, \quad I_3 = \frac{g}{2} (2h(x_r) - 2h(x_l) - S(x_r) + S(x_l)),$$

$$E = \frac{1 + \frac{S_x^2}{3} + h_x^2 - S_x h_x}{S}.$$



Модели мелкой воды. Условия сопряжения



Условия сопряжения

$$Hu|_{x_l} = Q = Hu|_{x_r}, \quad (6)$$

$$\frac{P}{S} \Big|_{x_r, x_l} = \left[\left(H - \frac{S}{2} \right) (g - R_2) - R_1 \left(\frac{H^2}{2} - \frac{S^2}{6} \right) \right] \Big|_{x_r, x_l} \quad (7)$$

$$R_1 = \frac{12\varphi - 6H\psi}{H^3}, \quad R_2 = \frac{-6\varphi + 4H\psi}{H^2}.$$

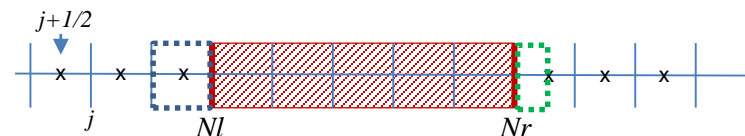
Граничное условие для свободной поверхности

$$\eta_x|_{x_r, x_l} = 0 \quad (8)$$



Пусть на n -шаге по времени искомые функции известны: $H_j^n, u_j^n, Q^n, \dot{Q}^n$.

1. На шаге предиктор вычисляются $H_{j+1/2}^*, u_{j+1/2}^*$



2. Из граничного условия (8) $\eta_x|_{x_r, x_l} = 0$ находим H_{Nl}^* и H_{Nr}^*

3. $Q^* = Q^n + \tau/2 * \dot{Q}^n$ и $u_{Nl}^* = Q^*/H_{Nl}^*$, $u_{Nr}^* = Q^*/H_{Nr}^*$

4. Вычисляем $\varphi_{j+1/2}^*$, в граничащих с телом ячейках нужно определить $k\varphi_x$ на границе:

$$(Hu)_t + \left(Hu^2 + \frac{H^2}{2}\right)_x = gHh_x + \varphi_x - \psi h_x$$

$$(Hu)_t = \dot{Q}$$

$$I_1 \dot{Q} + I_2 Q^2 + \left(\frac{P}{S}\right)\Big|_{x_l}^{x_r} = I_3,$$

$$\frac{P}{S}\Big|_{x_r, x_l} \rightarrow \varphi|_{x_r, x_l} \text{ из условия сопряжения (7)}$$

5. Вычисляется \dot{Q}^*

6. Шаги 1.-5. для $H_j^{n+1}, u_j^{n+1}, Q^{n+1}, \dot{Q}^{n+1}$



Формулы для вычисления волновой силы

Горизонтальная составляющая волновой силы

$$F_1(t) = \int_{d_0}^{\eta(x_l, t)} P(x_l, y, t) dy - \int_{d_0}^{\eta(x_r, t)} P(x_r, y, t) dy,$$

где P - «реконструированное» давление SGN-модели,

$$P(x, y, t) = \left(H(x, t) - (y + h(x)) \right) (g - R_2) - \left(\frac{H^2(x, t)}{2} - \frac{(y + h(x))^2}{2} \right) R_1(x, t).$$

В итоге после интегрирования получена следующая формула:

$$F_1(t) = \left[g \frac{(H - S)^2}{2} - \varphi \left(1 - \frac{3S}{2H} + \frac{S^3}{2H^3} \right) + \frac{S(H^2 - S^2)}{4H^2} \left(\dot{Q}h_x + (Hu^2h_x)_x \right) \right] \Big|_{x_r}^{x_l}$$

В случае NSWЕ-модели эта формула существенно упрощается:

$$F_1(t) = g \left(\eta(x_l, t) - \eta(x_r, t) \right) \left(\frac{\eta(x_l, t) + \eta(x_r, t)}{2} + d_0 \right)$$



Формулы для вычисления волновой силы

Вертикальная составляющая волновой силы

$$F_2(t) = \int_{x_l}^{x_r} \hat{p}(x, t) dx + gd_0L,$$

а \hat{p} вычисляется при помощи интегрирования уравнения (5), в итоге

$$F_2(t) = \frac{L}{2} \left[\left(g\eta - \frac{3H^2 - S_0^2}{2H^3} \varphi \right) \Big|_{x_l-0} + \left(g\eta - \frac{3H^2 - S_0^2}{2H^3} \varphi \right) \Big|_{x_r+0} \right],$$

и для NSWЕ-модели

$$F_2(t) = \frac{Lg}{2} \left[\eta \Big|_{x_l-0} + \eta \Big|_{x_r+0} \right]$$

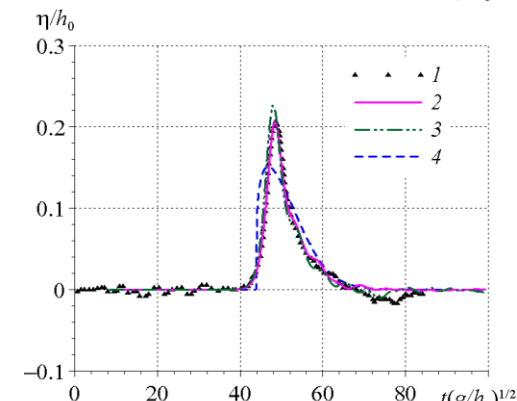
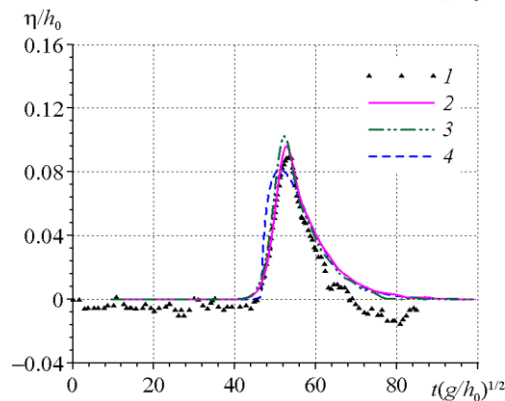
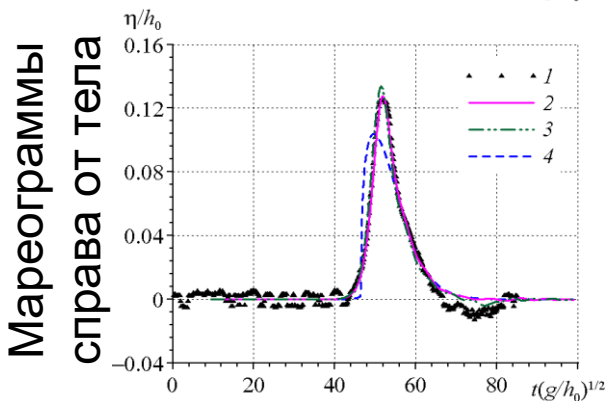
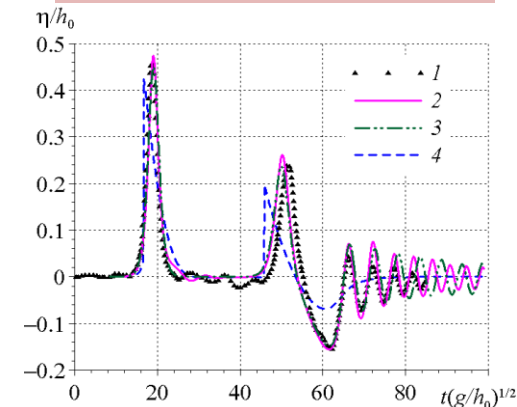
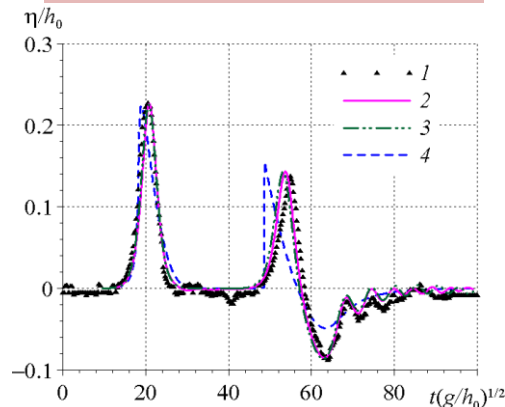
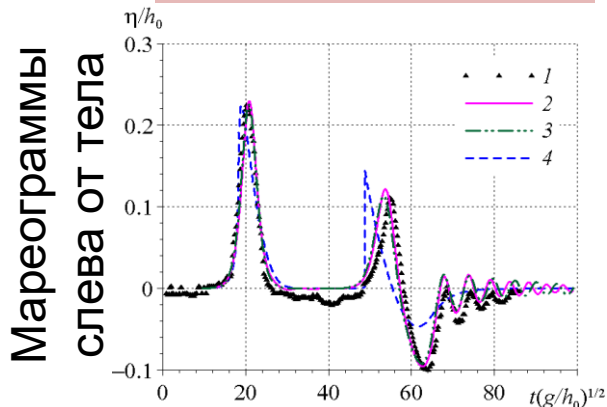


Сравнение с экспериментальными данными в задачах с ровным дном и днищем

$$|d_0|/h_0 = 0.5; a_0/h_0 = 0.23; \\ L/h_0 = 4$$

$$|d_0|/h_0 = 0.7; a_0/h_0 = 0.23; \\ L/h_0 = 4$$

$$|d_0|/h_0 = 0.5; a_0/h_0 = 0.45; \\ L/h_0 = 4$$

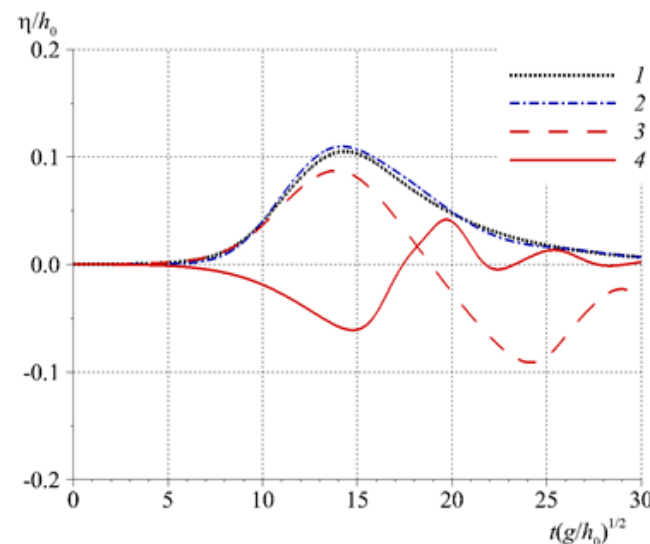
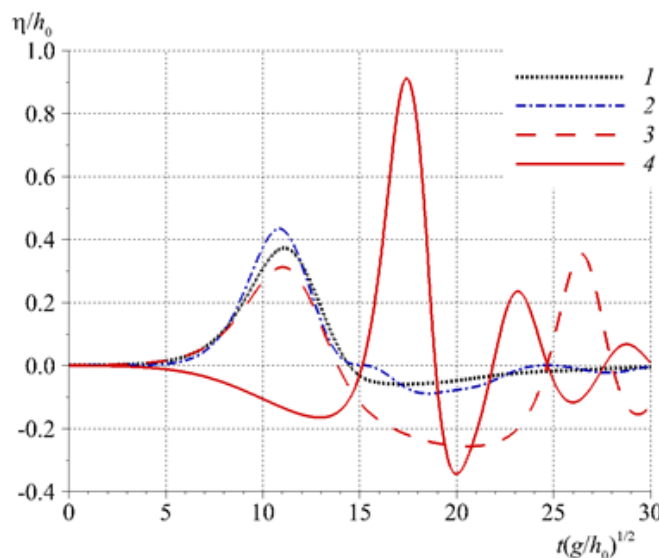
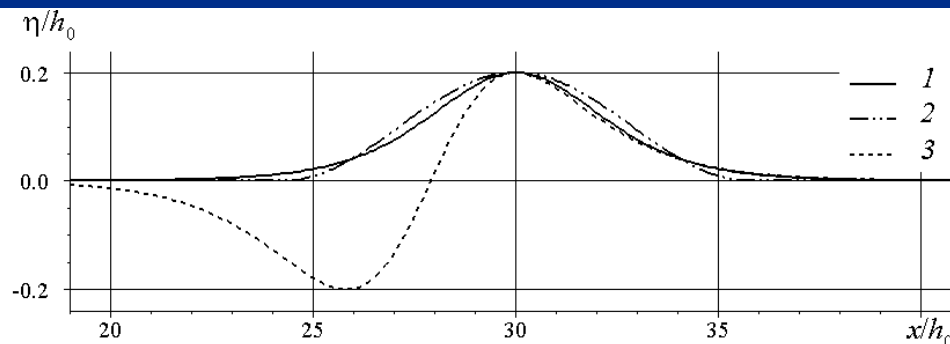


1 – экспериментальные данные; 2 – 4 – результаты численного моделирования: 2 – Pot-, 3 – NLD, 4 – SWE модели

Lu X., Wang K.-H. Modeling a solitary wave interaction with a fixed floating body using an integrated analytical-numerical approach // Ocean Engineering. 2015. Vol. 109. P. 691-704.



Влияние формы подходящей волны

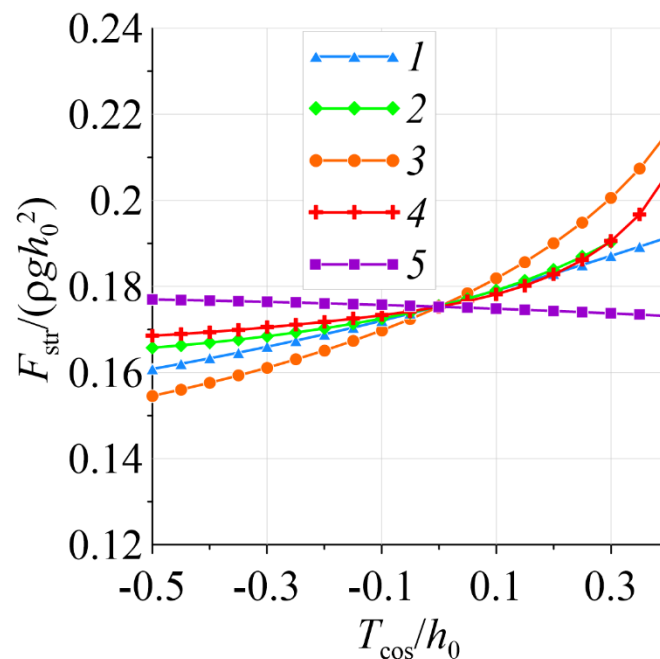
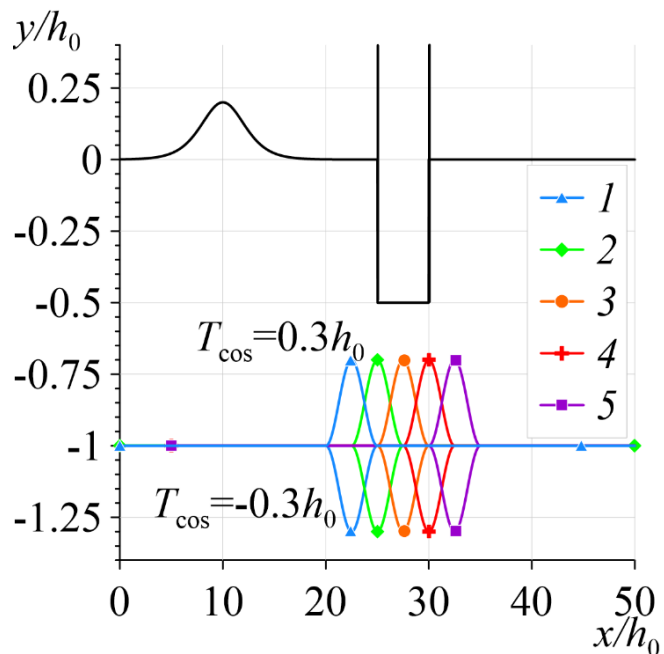


Хронограммы точки уреза на лицевой (слева) и тыльной (справа) гранях тела, при набегании на него уединенной волны (1), **одиночной** (2), **N-волн** с лидирующими волнами повышения (3) и понижения (4).

О. И. Гусев, В. С. Скиба, Г. С. Хакимзянов. Силовое воздействие длинных поверхностных волн на полупогруженное в воду тело. I. Влияние формы набегающей волны // Вычислительные технологии. – 2022. – Т. 27, № 4, с. 33–62.



Влияние положения неровности дна

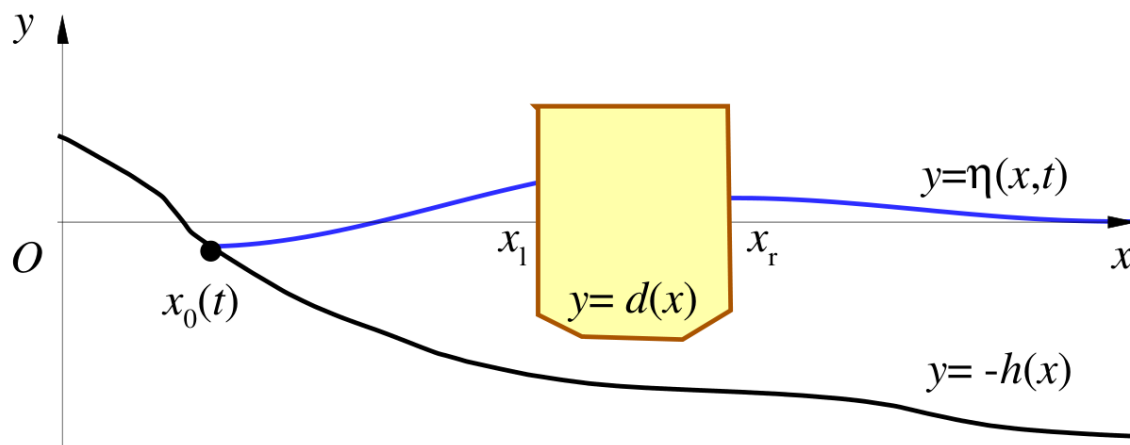


Gusev O.I., Khakimzyanov G.S., Skiba V.S., Chubarov L.B. Shallow water modeling of wave–structure interaction over irregular bottom // Ocean Engineering. - 2023. - Vol.267. - Art.113284.

Гусев О.И., Скиба В.С., Хакимзянов Г.С., Чубаров Л.Б. Влияние неровности дна на характеристики взаимодействия уединенной волны с полупогруженным телом прямоугольного сечения // Прикладная механика и техническая физика. - 2023. - Т.64. - № 1. - С.60-75.

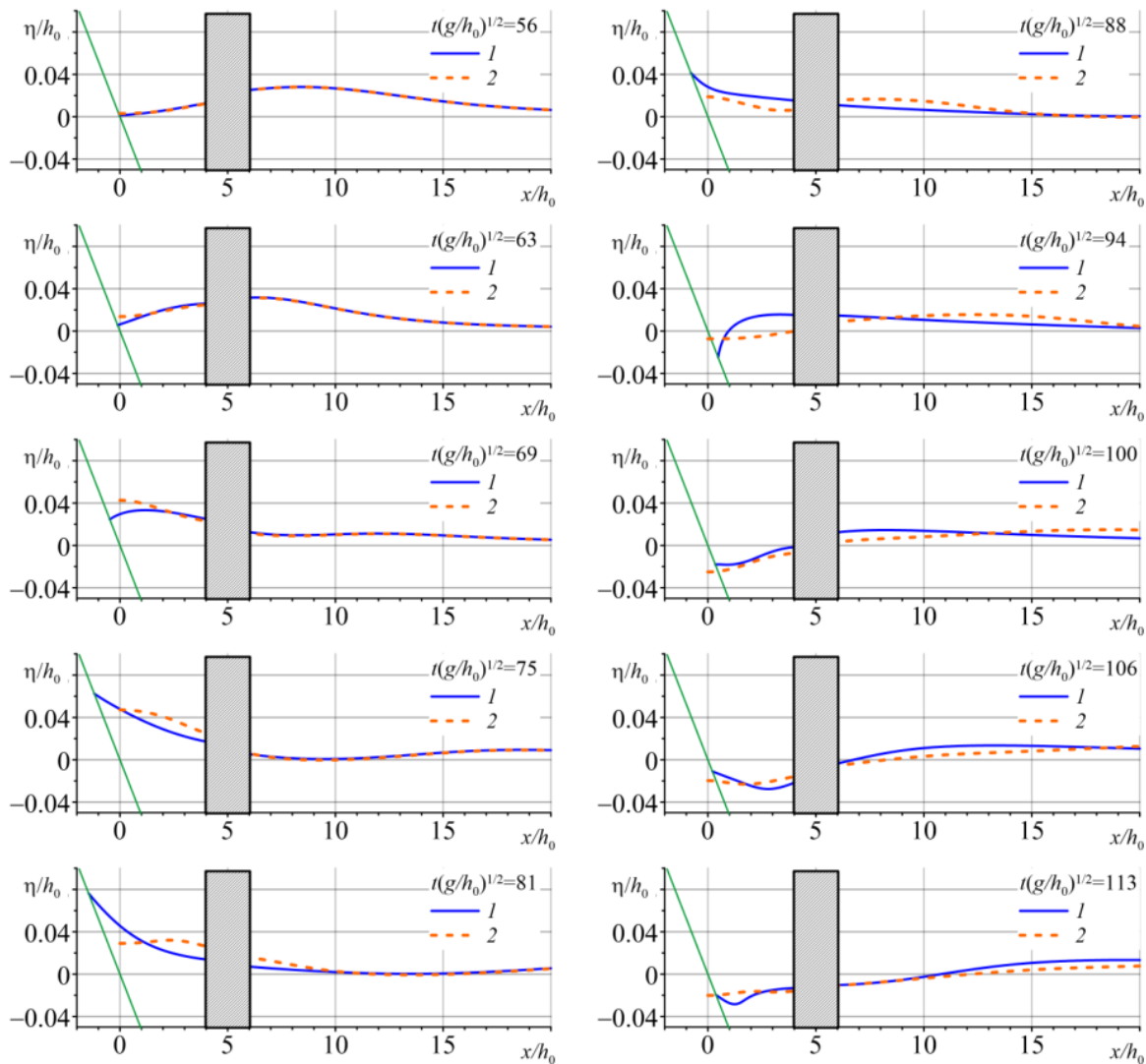


Взаимодействие волн с телом и берегом





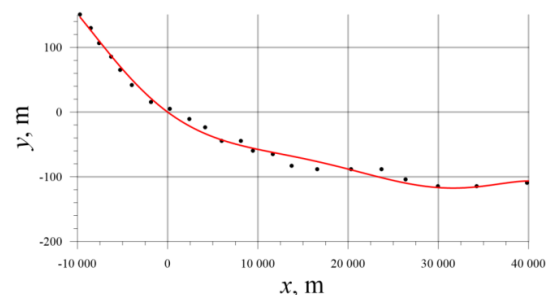
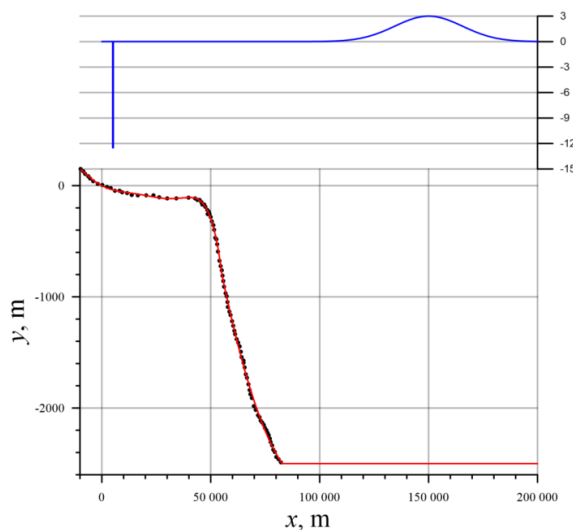
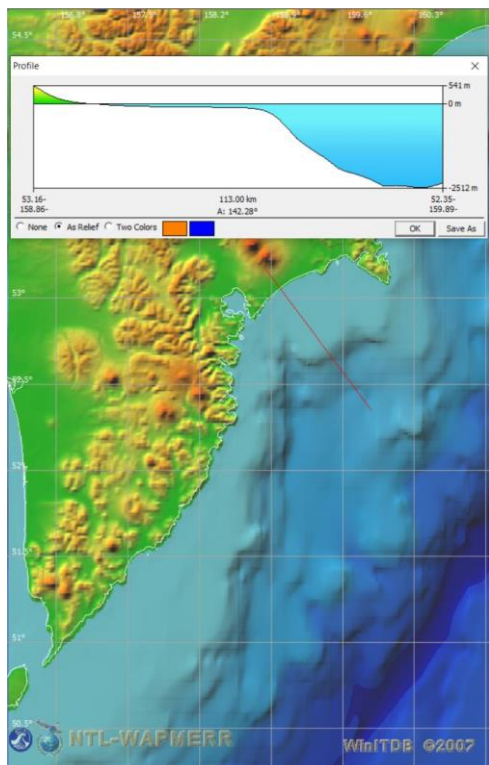
Взаимодействие волны с телом над ПЛОСКИМ СКЛОНОМ



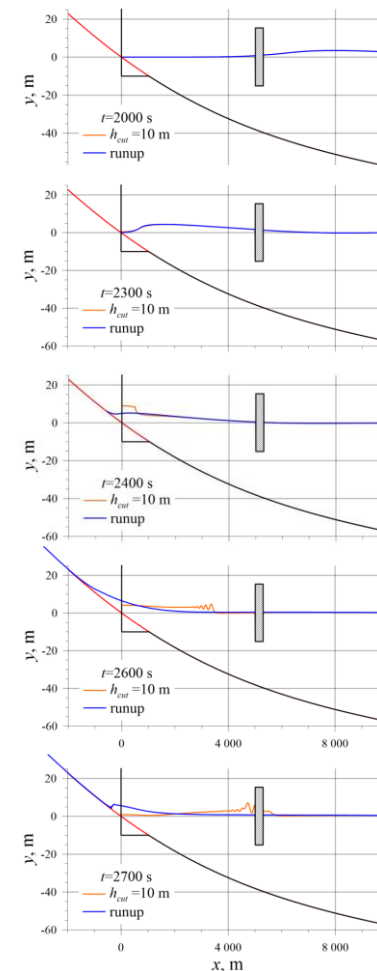


Пример расчёта с сечением реального склона

Построение модельного рельефа с использованием программы WinITDB (В.К. Гусяков, ИВМиМГ СО РАН)

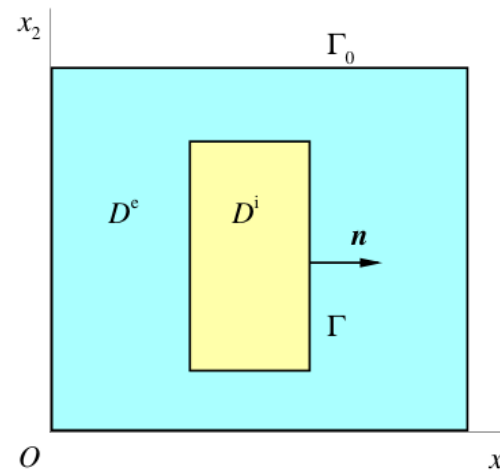
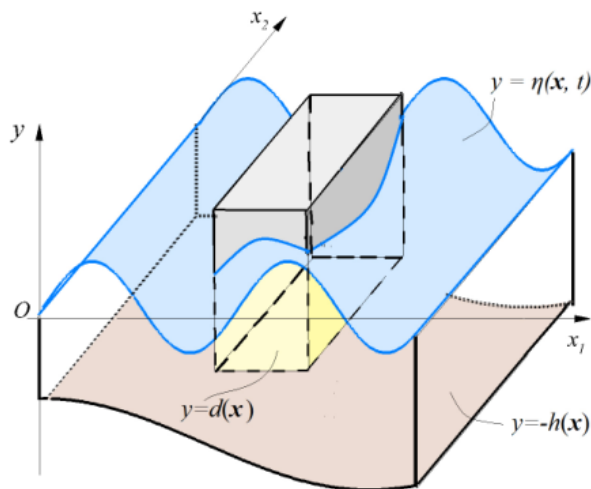


Результаты расчётов





Плановая модель мелкой воды



$$\nabla \cdot (S\mathbf{u}) = 0,$$

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho S} \nabla p = \frac{1}{\rho S} \hat{p} \nabla h + \frac{1}{\rho S} \hat{p} \nabla d,$$

или

$$(\rho S \mathbf{u})_t + \mathbf{f}_{x_1}^1 + \mathbf{f}_{x_2}^2 + S \nabla \frac{p}{S} = \rho g \frac{S}{2} \nabla (2h - S).$$

(6)

Условия сопряжения
на границе тела:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho S_0 (\mathbf{u}^i \cdot \mathbf{n}) = \rho H (\mathbf{u}^e \cdot \mathbf{n}), \\ \mathbf{u}^i \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{u}^e \cdot \boldsymbol{\tau}, \\ p^i = \rho g S_0 (H - S_0/2), \end{array} \right. \quad \mathbf{x} \in \Gamma, t \geq 0,$$



Численный алгоритм для плановой модели мелкой воды

Шаг предиктор схемы типа Мак-Кормака:

$$\rho S_{j+1/2} \frac{\tilde{\mathbf{u}}_{j+1/2}^* - \mathbf{u}_{j+1/2}^n}{\tau} + \frac{\mathbf{f}_{j+1/2}^{1,n} - \mathbf{f}_{j_1-1/2, j_2+1/2}^{1,n}}{h_1} + \frac{\mathbf{f}_{j+1/2}^{2,n} - \mathbf{f}_{j_1+1/2, j_2-1/2}^{2,n}}{h_2} = 0. \quad (7a)$$

$$\nabla_h \cdot (S \nabla_h P)_j = \frac{1}{\tau} \nabla_h \cdot (S \tilde{\mathbf{u}}^*)_j + g L_h (h - S/2)_j, \quad (7b)$$

$$\frac{\mathbf{u}_{j+1/2}^* - \tilde{\mathbf{u}}_{j+1/2}^*}{\tau} + \nabla_h P_{j+1/2} = g \nabla_h (h - S/2)_{j+1/2} \quad (7c)$$

Шаг корректор:

$$\rho S_{j+1/2} \frac{\tilde{\mathbf{u}}_{j+1/2}^{n+1} - \frac{\mathbf{u}_{j+1/2}^* + \mathbf{u}_{j+1/2}^n}{2}}{\tau/2} + \frac{\mathbf{f}_{j_1+3/2, j_2+1/2}^{1,*} - \mathbf{f}_{j+1/2}^{1,*}}{h_1} + \frac{\mathbf{f}_{j_1+1/2, j_2+3/2}^{2,*} - \mathbf{f}_{j+1/2}^{2,*}}{h_2} = 0, \quad (8a)$$

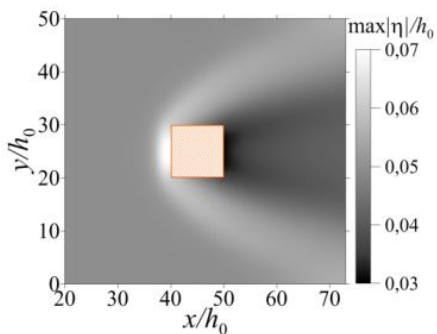
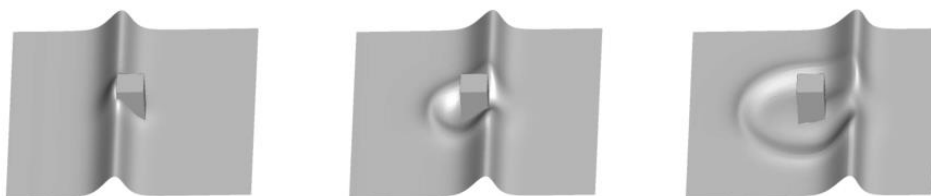
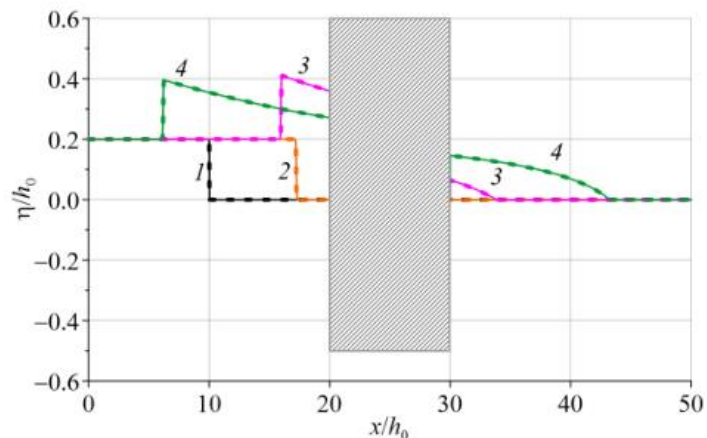
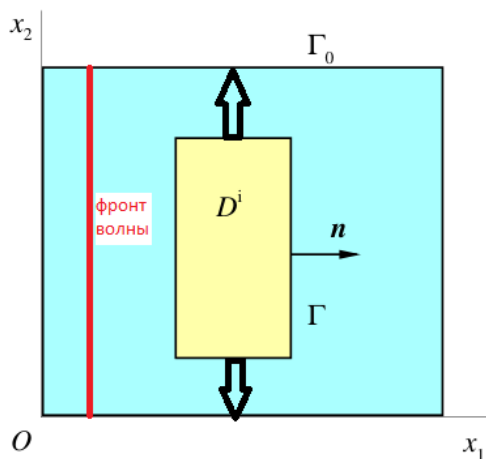
$$\nabla_h \cdot (S \nabla_h P)_j = \frac{2}{\tau} \nabla_h \cdot (S \tilde{\mathbf{u}}^{n+1})_j + g L_h (h - S/2)_j \quad (8b)$$

$$\frac{\mathbf{u}_{j+1/2}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_{j+1/2}^{n+1}}{\tau/2} + \nabla_h P_{j+1/2} = g \nabla_h (h - S/2)_{j+1/2} \quad (8c)$$

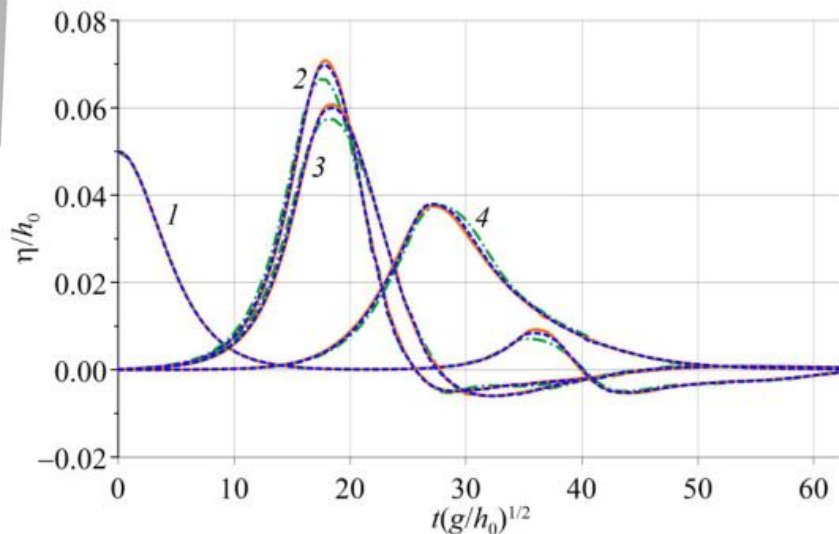


2D алгоритм

Сравнения с 1D-алгоритмом на задаче о воздействии бора на тело, прижатое к стенкам:



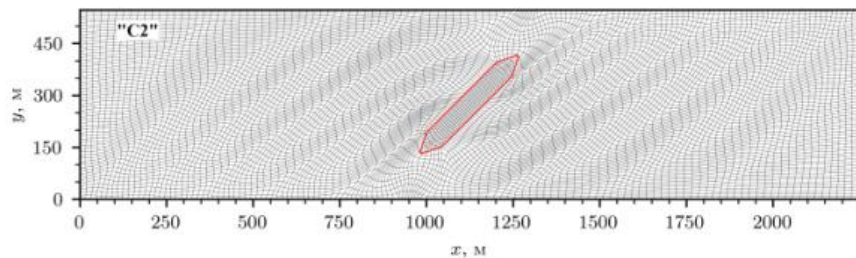
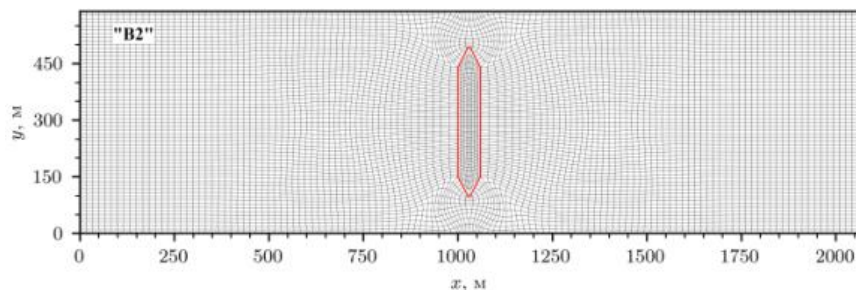
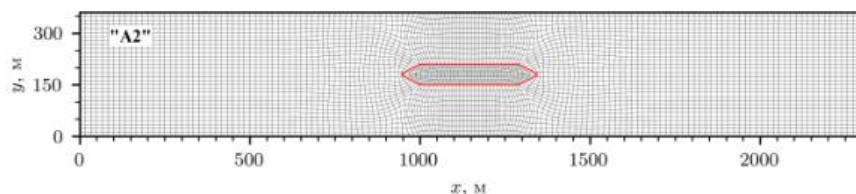
Сходимость на последовательности сеток:



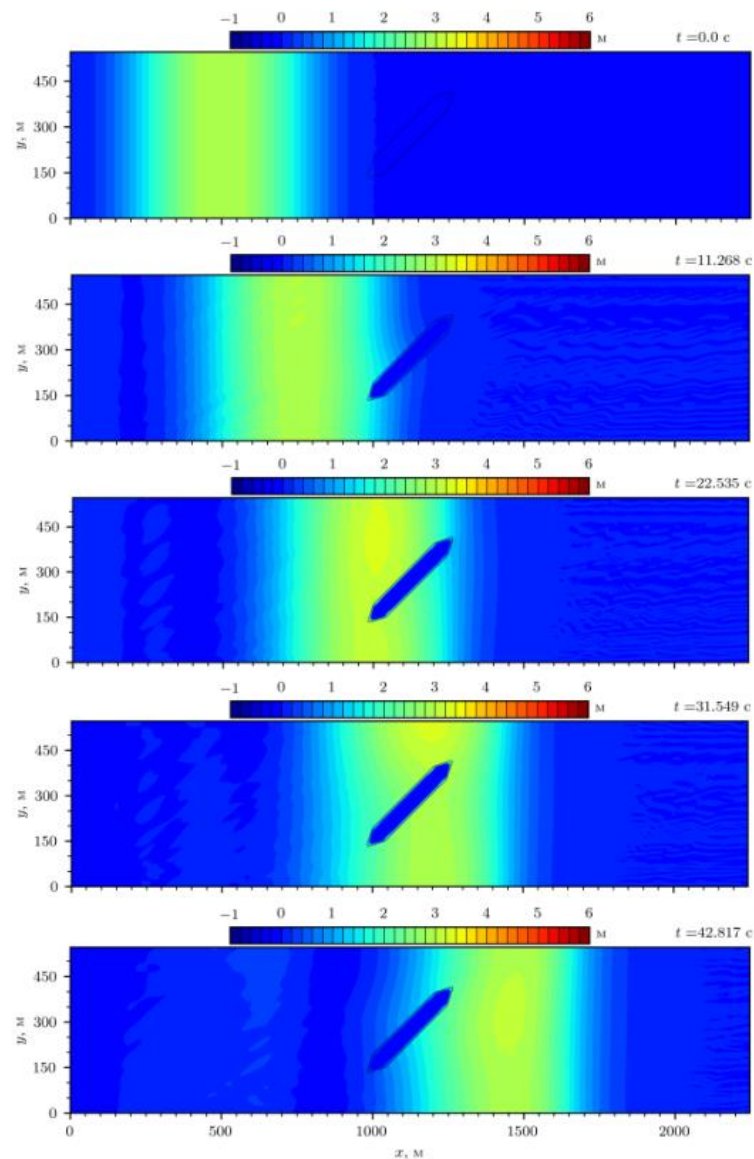


Расчёты с реальной формой сооружения

Вид сверху

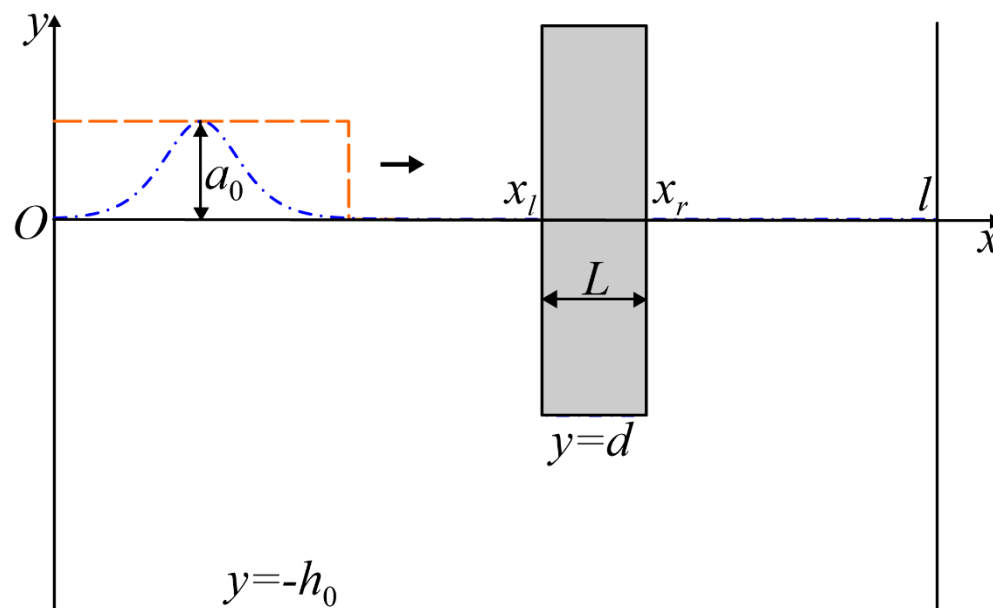


разные углы подхода волны





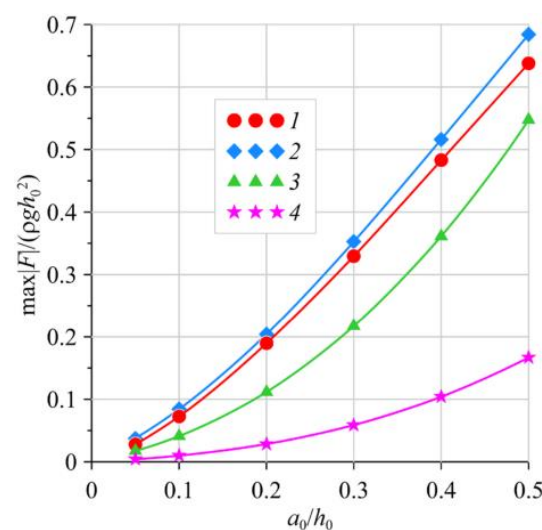
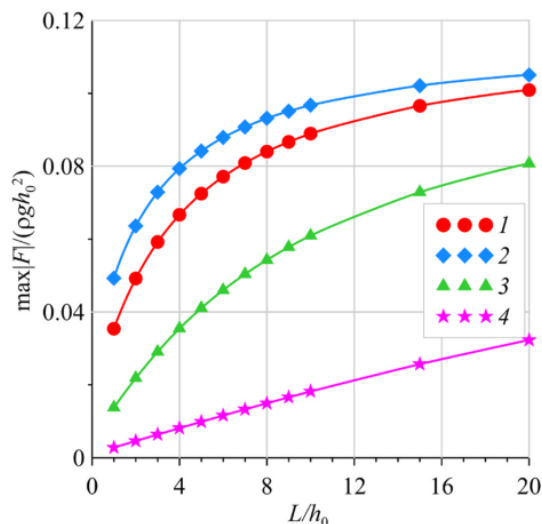
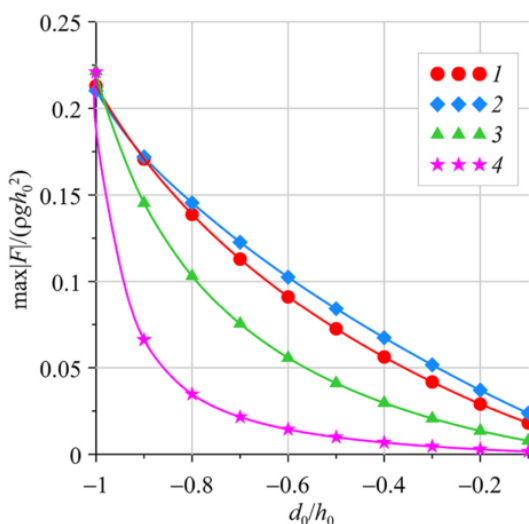
Настоящий доклад про 1D постановку с ровным дном бассейна и днищем тела



Самая «упрощённая» постановка – шаг назад?



- Во многих статьях, посвящённых численному моделированию подобных задач, приводится единичный расчёт воздействия волны с полупогруженным телом для демонстрации работоспособности алгоритма [например, 1] (в некоторых случаях видно, что алгоритм работает плохо).
- В некоторых фиксируется базовый набор параметров задачи и потом один из них варьируется и строятся графики зависимостей исследуемой характеристики от этого параметра [например, 2].



[1] Yuxiang Ma, Changfu Yuan, Congfang Ai, Guohai Dong. Comparison between a non-hydrostatic model and OpenFOAM for 2D wave-structure interactions // Ocean Engineering. - 2019. - Vol.183. – P. 419-425.

[2] Oleg I. Gusev, Gayaz S. Khakimzyanov, Leonid B. Chubarov. Numerical investigation of the wave force on a partially immersed rectangular structure: Long waves over a flat bottom // Ocean Engineering 221 (2021) 108540.



НИР по моделированию - возможности

- ✓ Расчёты с использованием иерархии математических моделей повышают достоверность полученных результатов;
- ✓ Различные типы волн и их параметры (амплитуда, длина);
- ✓ Задаются не только конкретные параметры (заглубление, длина, ширина) конструкции, но и её форма;
- ✓ Возможность учитывать реальную батиметрию, где планируется размещение сооружения;
- ✓ Возможность рассмотреть разные углы подхода волны;
- ✓ Анализ хронограмм, а не только максимальных значений;
- ✓ Поиск наименее подверженных волновому воздействию участков акватории для размещения.

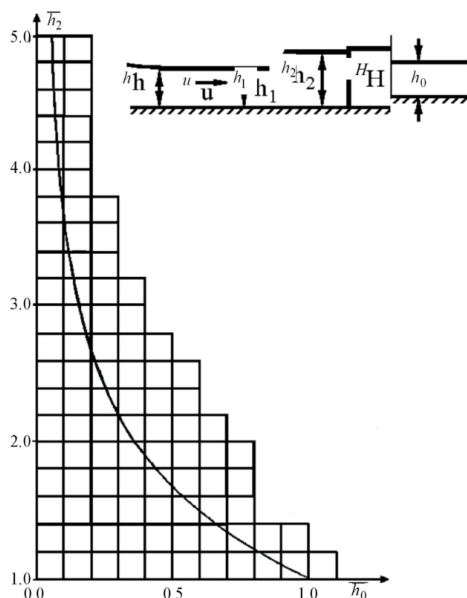


Формулы, позволяющие оценить воздействие



В некоторых работах авторами приводятся формулы для расчёта характеристик воздействия волн с полупогруженным телом или вертикальной стенкой.

Например, для воздействия бора:



$$F_x = 0.5 \rho g h^2 \text{отр} B f.$$

Сила воздействия на полупогруженное тело вычисляется как доля от силы воздействия на вертикальную стенку.

[1] А.А. Дорфман, С.А. Печенин, К.К. Семенов, И.С. Нуднер, В.В. Максимов. Воздействие волны цунами на морские гидротехнические сооружения и береговые объекты // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика* - 2017. - Т.10. – С. 16-30.

[2] СП 292.1325800.2017. Свод правил. Здания и сооружения в цунамиопасных районах. Правила проектирования (утв. и введен в действие Приказом Минстроя России от 23.06.2017 N 915/пр)



Формулы для заплеска уединённой волны на вертикальную стенку

Для заплеска уединённой волны на вертикальную стенку:

$$R = 2a_0 + \frac{1}{2}a_0^2.$$

[1] *Byatt-Smith J.G.B.* An integral equation for unsteady surface waves and a comment on the Boussinesq equation // *Journal of Fluid Mechanics*. 1971. 49: 625–633.

[2] *Maxworthy T.* Experiments on collisions between solitary waves. *Journal of Fluid Mechanics*. 1976; 76(1):177–185.

$$R = 2a_0 + \frac{1}{2}a_0^2 + \frac{3}{4}a_0^3.$$

[3] *Su C.H., Mirie R.M.* On head-on collisions between two solitary waves // *J. Fluid. Mech.* 1980. Vol. 98, No. 3. P. 509–525.

$$R = 2.55a_0^{1.17}$$

[4] *Liu P.L.F., Al-Banaa K.* Solitary wave runup and force on a vertical barrier // *Journal of Fluid Mechanics*. 2004; 505:225–233.



Формулы для силы воздействия уединённой волны на вертикальную стенку

Для силы воздействия уединённой волны на вертикальную стенку:

$$F_h/(\rho gh_0^2) = 2.65(1 - \exp(-a_0^{1.14}))$$

[1] Liu P.L.F., Al-Banaa K. Solitary wave runup and force on a vertical barrier // Journal of Fluid Mechanics. 2004; 505:225–233.

$$F_h/(\rho gh_0^2) = -1.61a_0^2 + 2.79a_0$$

[2] Chen, Y.Y., Li, Y.J., Hsu, H.C., Hwung, H.H., 2019b. The pressure distribution beneath a solitary wave reflecting on a vertical wall // Eur. J. Mech. B Fluid 76, 66–72.

$$F_h/(\rho gh_0^2) = 0.11a_0^2 + 2.19a_0$$

[3] Gusev O.I., Khakimzyanov G.S., Chubarov L.B. Numerical investigation of the wave force on a partially immersed rectangular structure: Long waves over a flat bottom // Ocean Engineering. 2021; (221):Article 108540.



Формулы для характеристик воздействия уединённой волны на полупогруженное тело

Для очень короткого тела ($L=0.16h_0$) в работе

Liu P.L.F., Al-Banaa K. Solitary wave runup and force on a vertical barrier // Journal of Fluid Mechanics. 2004; 505:225–233.

представлены формулы для максимального заплеска

$$\bar{H}/h = \alpha(H/h)^\beta,$$

$$\alpha = 2.0 + 0.81(D/h) - 0.26(D/h)^2, \quad \beta = 1.32 + 0.20(D/h) - 0.35(D/h)^2$$

и максимальной горизонтальной составляющей волновой силы:

$$F_m/F_o = \delta\{1 - \exp[-(H/h)^\gamma]\},$$

$$\delta = 2.4 + 0.22(D/h) + 3.11(D/h)^2, \quad \gamma = 2.65 - 2.08(D/h) + 0.57(D/h)^2.$$



СНиП 2.06.04-82*: Нагрузки и воздействия на гидротехнические сооружения (волновые, ледовые и от судов)



где A_l и A_x - соответственно боковая и лобовая подводные площади парусности плавучих объектов, м²;

C_y , C_x - обобщающие коэффициенты продольной и поперечной силы воздействия течения, определяемые с учетом соотношения осадки плавучего объекта и глубины воды (приложение К);

V_x и V_y - поперечная и продольная составляющие скорости течения, м/с, принимаемые в соответствии с таблицей 7.

6.4 Расчетные максимальные значения поперечной Q , кН, и продольной N , кН, горизонтальных сил от воздействия волн на плавучие объекты следует определять по формулам:

$$Q = \omega \gamma_1 \rho g h A_l, \quad (37)$$

$$N = \omega \rho g h A_x, \quad (38)$$

где ω - коэффициент, зависящий от осадки a_s , м, плавучего объекта; принимается по графику на рисунке 15;

γ_1 - коэффициент, принимаемый по таблице 9, в которой a_l - наибольший горизонтальный размер продольного силуэта подводной части плавучего объекта, м;

h - высота волны обеспеченностью 5% в системе, м;

A_l и A_x - обозначения те же, что и в 6.3.

Рисунок 15 - График значений коэффициента ω

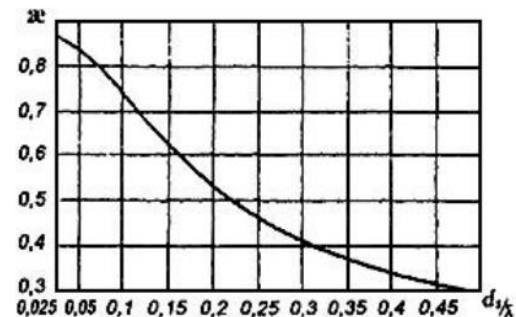


Таблица 9

a_l / λ^*	0,5 и менее	1	2	3	4 и более
Коэффициент γ_1	1	0,73	0,5	0,42	0,4

* Вероятно ошибка оригинала. Следует читать $a_l / \bar{\lambda}$. - Примечание изготовителя базы данных.



Как получить формулу по результатам расчётов

1. определить диапазоны параметров задачи, в которых используемые модели работают адекватно, создать соответствующие массивы;
2. выполнить массовые расчёты, собрать необходимые характеристики в соответствующие файлы;
3. исследовать одномерные срезы нужной характеристики (например, зависимость заплеска на лицевую грань от амплитуды при фиксированных остальных параметрах), и попытаться подобрать функции, которые хорошо описывают такие зависимости;
4. «зная» зависимости от каждого параметра и *априорную информацию* построить общую формулу, возможно, с большим количеством коэффициентов;
5. определить «оптимальный» набор коэффициентов, минимизируя погрешность формулы относительно данных расчётов;
6. по возможности сократить формулу, избавляясь от наименее значащих слагаемых, каждый раз заново проводя оптимизацию из предыдущего пункта.



Про поиск «оптимальных» коэффициентов. Что минимизировать?

- В зависимости от параметров задачи, характеристики взаимодействия могут отличаться на 4 порядка, поэтому использование суммы квадратов абсолютных значений отклонений приводит к тому, что очень плохое соответствие будет в области малых значений характеристики.

Решение - использовать сумму квадратов относительных отклонений.

- Целесообразно минимизировать и **максимальное** относительное отклонение.

Будем использовать произведение суммы квадратов относительной ошибки на максимальную относительную погрешность.



Про поиск «оптимальных» коэффициентов. Как минимизировать?

Использование готовых открытых программных кодов: процедуры `least_squares` и `basinhopping` из библиотеки SciPy Optimize на Python.

- **least_squares** предназначена для решения нелинейных (в нашем случае относительно коэффициентов формулы) задач, ищет **локальный** минимум суммы квадратов (относительных отклонений в нашем случае). Эта процедура считает очень быстро, и несмотря на то, что не гарантируется глобальность максимума, и нет никакой возможности минимизировать максимальную относительную ошибку, во многих случаях она позволяет получить удовлетворительный результат.
- **basinhopping** работает значительно медленнее, но позволяет найти **глобальный** минимум для заданной функции, в качестве которой в настоящей работе использовалось произведение суммы квадратов относительной ошибки на максимальную относительную ошибку.

Global optimization

<code>basinhopping</code> (func, x0[, niter, T, stepsize, ...])	Find the global minimum of a function using the basin-hopping algorithm.
<code>brute</code> (func, ranges[, args, Ns, full_output, ...])	Minimize a function over a given range by brute force.
<code>differential_evolution</code> (func, bounds[, args, ...])	Finds the global minimum of a multivariate function.
<code>shgo</code> (func, bounds[, args, constraints, n, ...])	Finds the global minimum of a function using SHG optimization.
<code>dual_annealing</code> (func, bounds[, args, ...])	Find the global minimum of a function using Dual Annealing.
<code>direct</code> (func, bounds, *[, args, eps, maxfun, ...])	Finds the global minimum of a function using the DIRECT algorithm.

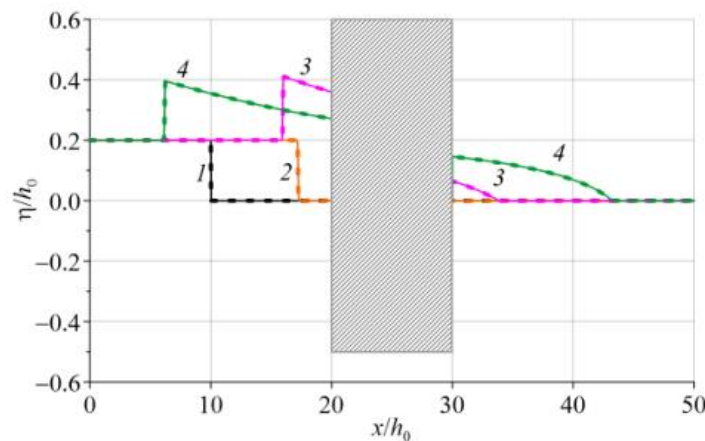
Least-squares and curve fitting

Nonlinear least-squares

<code>least_squares</code> (fun, x0[, jac, bounds, ...])	Solve a nonlinear least-squares problem with bounds on the variables.
--	---



Воздействие бора на полупогруженное тело



- Используется NLSWE-модель, бор распространяется без изменения формы
- Параметры

$$a_0 = [0.01, 0.02, \dots, 0.1, 0.15, \dots, 0.5],$$

$$d = [0.05, 0.1, \dots, 1].$$

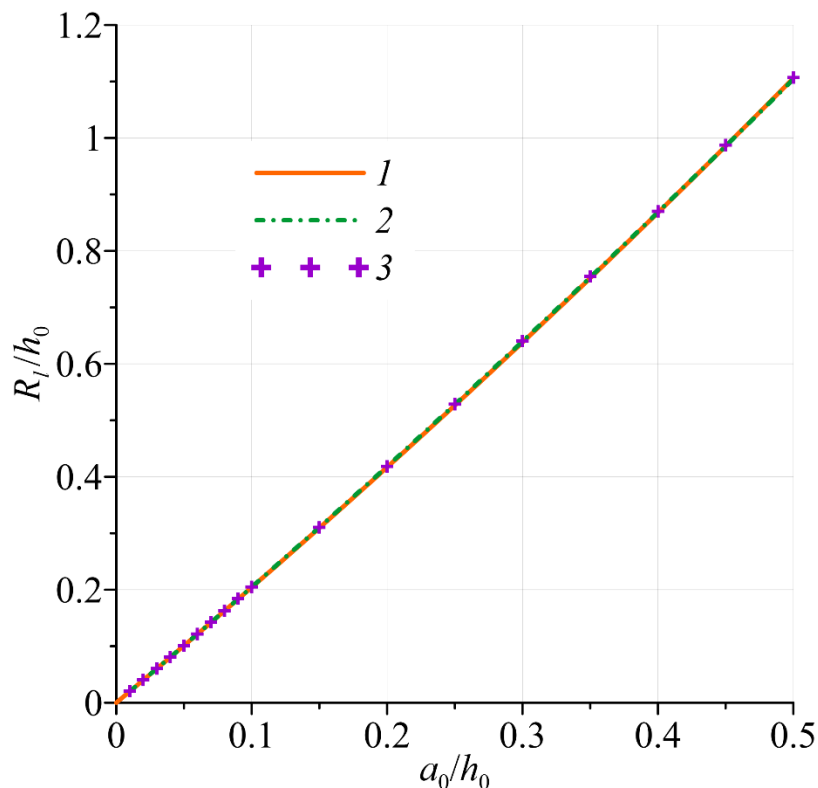
- 360 расчётов
- Характеристики воздействия не зависят от длины тела L (кроме вертикальной силы, которая прямо пропорциональна L)



Заплеск бора на левую грань тела

Максимальный заплеск бора на левую грань не зависит от заглубления тела и хорошо описывается квадратичной функцией от амплитуды бора:

$$R_l/h_0 = 0.423a_0^2 + 2a_0.$$



Максимальная относительная погрешность этой формулы составляет 0.7%, средняя — 0.4%.

- 1 – полученная формула
- 2 – аналитическое решение для воздействия на вертикальную стенку [Stoker 1957]
- 3 – результаты расчётов



При построении формулы для горизонтальной составляющей силы воздействия бора учитывалось, что

- при $a_0 = 0$ сила равна нулю
- в срезях зависимость от d хорошо описывается линейной функцией
- в срезях зависимость от a_0 хорошо описывается кубической функцией

Итоговая формула:

$$F_h/(\rho gh_0^2) = 1.987(a_0^2 + a_0 d) + 0.503a_0^2 d + 0.859a_0^3$$

Максимальная относительная погрешность равна 0.7%, средняя — 0.2%.

Замечание. Применение формулы для горизонтальной составляющей волновой силы в NSWE-модели

$$F_h(t)/(\rho gh_0^2) = (\bar{\eta}(x_l, t) - \bar{\eta}(x_r, t)) \left(\frac{\bar{\eta}(x_l, t) + \bar{\eta}(x_r, t)}{2} - \bar{d} \right)$$

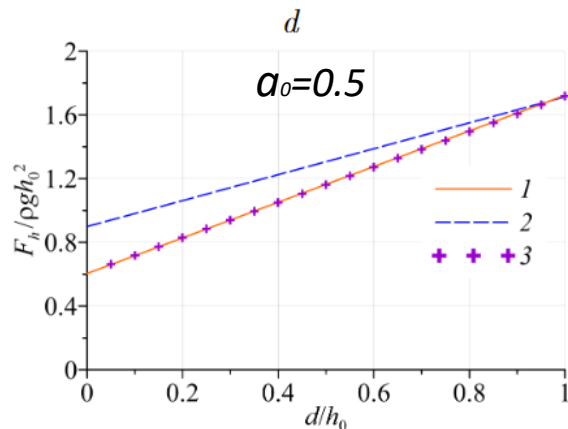
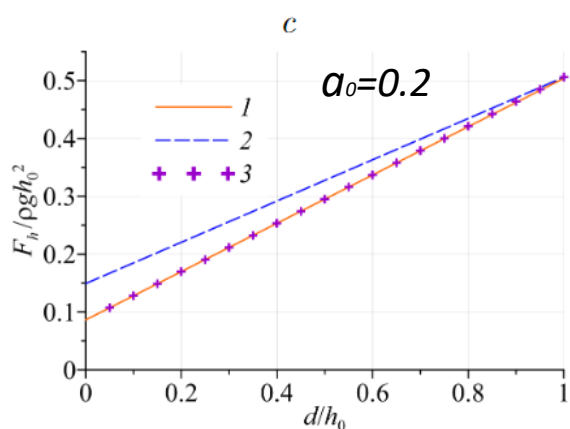
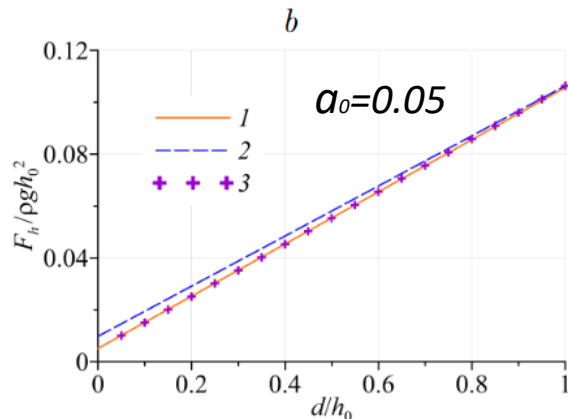
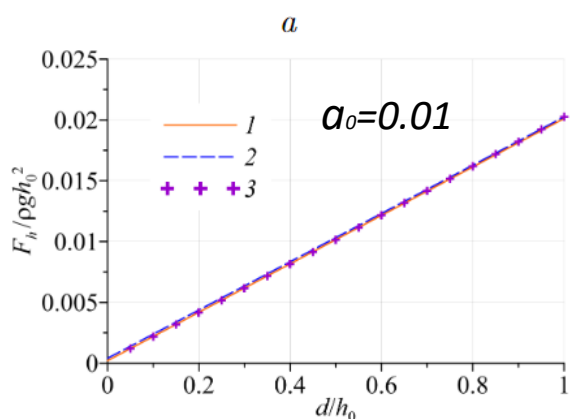
в предположении моментального максимального воздействия бора на левую грань при том, что на правой грани свободная поверхность еще остается невозмущенной, приводит с учетом формулы для заплеска к следующему выражению:

$$F_h/(\rho gh_0^2) = R_l(R_l/2 + d) = 0.0895a_0^4 + 0.846a_0^3 + 0.423a_0^2 d + 2(a_0^2 + a_0 d)$$

Максимальная относительная погрешность этой формулы равна 1.3%, средняя — 0.4%.



Горизонтальная сила воздействия бора



1 – полученная формула

2 – формула из [1,2], где сила воздействия на полупогруженное тело вычисляется как доля от силы воздействия на вертикальную стенку

3 – результаты расчётов

[1] А.А. Дорфман, С.А. Печенин, К.К. Семенов, И.С. Нуднер, В.В. Максимов. Воздействие волны цунами на морские гидротехнические сооружения и береговые объекты // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика* - 2017. - Т.10. – С. 16-30.

[2] СП 292.1325800.2017. Свод правил. Здания и сооружения в цунамиопасных районах. Правила проектирования (утв. и введен в действие Приказом Минстроя России от 23.06.2017 N 915/пр)



Вертикальная сила воздействия бора

Вертикальная составляющая силы воздействия бора

- зависит от L прямо пропорционально
- не зависит от d
- зависимость от a_0 хорошо описывается квадратичной функцией

Итоговая формула:
$$F_v/(\rho gh_0^2) = L \cdot (0.286a_0^2 + a_0)$$

Максимальная относительная погрешность равна 0.6%, средняя — 0.2%.

Замечание. Применение формулы для вертикальной составляющей волновой силы в NSWЕ-модели

$$F_v(t)/(\rho gh_0^2) = \frac{\bar{L}}{2} (\bar{\eta}(x_l, t) + \bar{\eta}(x_r, t))$$

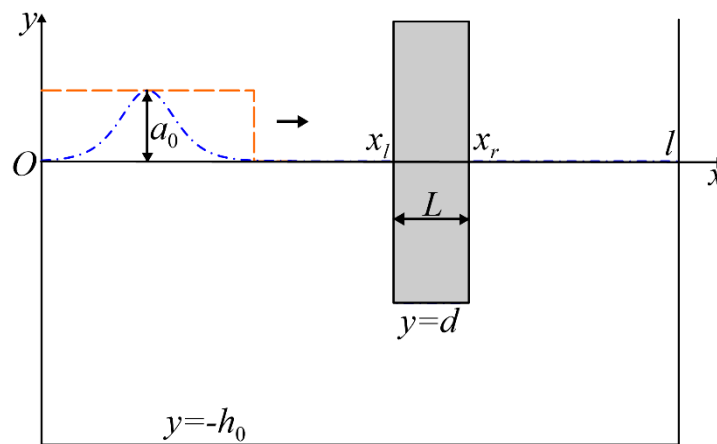
в предположении моментального максимального воздействия бора на левую грань при том, что на правой грани свободная поверхность еще остается невозмущенной, приводит с учетом формулы для заплеска к следующему выражению:

$$F_v/(\rho gh_0^2) = LR_l/2 = L \cdot (0.216a_0^2 + a_0)$$

Максимальная относительная погрешность этой формулы равна 2.5%, средняя — 1.2%.



Воздействие уединённой волны на полупогруженное тело



- Используется SGN-модель, уединённая волна распространяется без изменения формы

- Параметры

$$a_0 = [0.01, 0.02, \dots, 0.1, 0.15, \dots, 0.5],$$

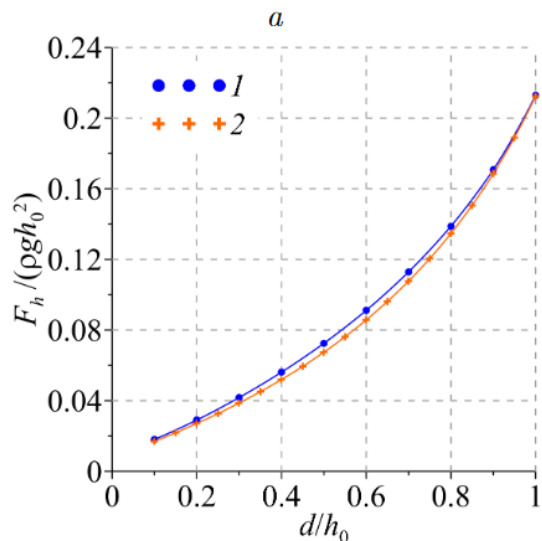
$$d = [0.05, 0.1, \dots, 1],$$

$$L = [3, 4, \dots, 10, 25].$$

- 3240 расчётов, из них 3055 учитывались

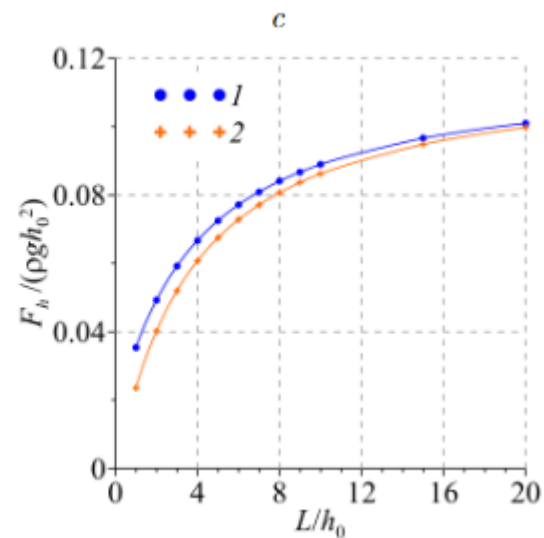
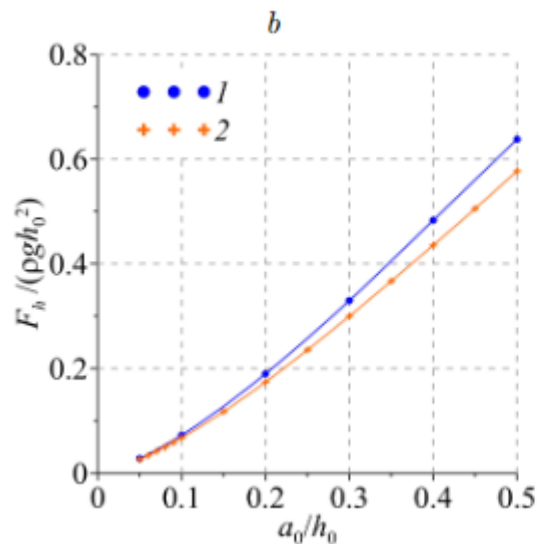


Границы применимости SGN-модели



1 - Pot-модель
2 - SGN-модель

- При варьировании заглубления тела d согласие между моделями остаётся очень хорошим во всём диапазоне;
- при увеличении амплитуды a_0 уединённой волны различия растут, но не превышают 10%;
- при уменьшении длины тела L различия растут и при $L < 3$ достигают более 15%, причём SGN-модель занижает значения силы!





Заплеск уединённой волны налицевую грань полупогруженного тела

Для построения формулы, аппроксимирующей величину максимального заплеска на лицевую грань полупогруженного закрепленного тела, учитывалось, что

- при $a_0 = 0$ заплеск равен нулю;
- при $d = 1$ заплеск не зависит от L ;
- каждая из зависимостей от заглупления d и длины L хорошо аппроксимируются дробно-линейными функциями, а от начальной амплитуды падающей волны a_0 — дробно-рациональной, в которой степень числителя была равна 3, а знаменателя — 1;

Тогда структура «полной» формулы может быть представлена в виде

$$R_1/h_0 = a_0 \frac{L \cdot (k_1 a_0^2 d + k_2 a_0^2 + k_3 a d + k_4 a_0 + k_5 d + k_6) + (1 - d) \cdot (a_0^2 + k_7 a_0 + k_8)}{L \cdot (k_9 a_0 d + k_{10} a_0 + k_{11} d + k_{12}) + (1 - d) \cdot (k_{13} a_0 + k_{14})}$$

Процедура оптимизации приводит к набору коэффициентов

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7
-0.078	0.26	-0.037	0.75	0.0031	0.0044	0.048
k_8	k_9	k_{10}	k_{11}	k_{12}	k_{13}	k_{14}
0.16	-0.032	0.39	0.0022	0.0016	0.42	0.17

Максимальная относительная погрешность составляет 1.9%, средняя — 0.3%.



Заплеск уединённой волны на *лицевую* грань пологогруженного тела

Итоговая «усечённая» формула:

$$R_l/h_0 = a_0 \frac{L \cdot (0.211a_0^2 + 0.629a_0) + (1 - d) \cdot (a_0^2 - 0.19a_0 + 0.0822)}{0.32La_0 + (1 - d) \cdot (0.389a_0 + 0.0822)}$$

Максимальная относительная погрешность составляет 3.7%, средняя — 0.9%.

В случае $d=1$ (вертикальная стенка):

$$R_l/h_0 = 1.966a_0 + 0.66a_0^2 \quad \text{- линия 1}$$

Другие известные формулы:

$$R = 2a_0 + \frac{1}{2}a_0^2 \quad \text{- линия 2 [Byatt-Smith 1971]}$$

$$R = 2a_0 + \frac{1}{2}a_0^2 + \frac{3}{4}a_0^3 \quad \text{- линия 3 [Su, Mirie 1980]}$$

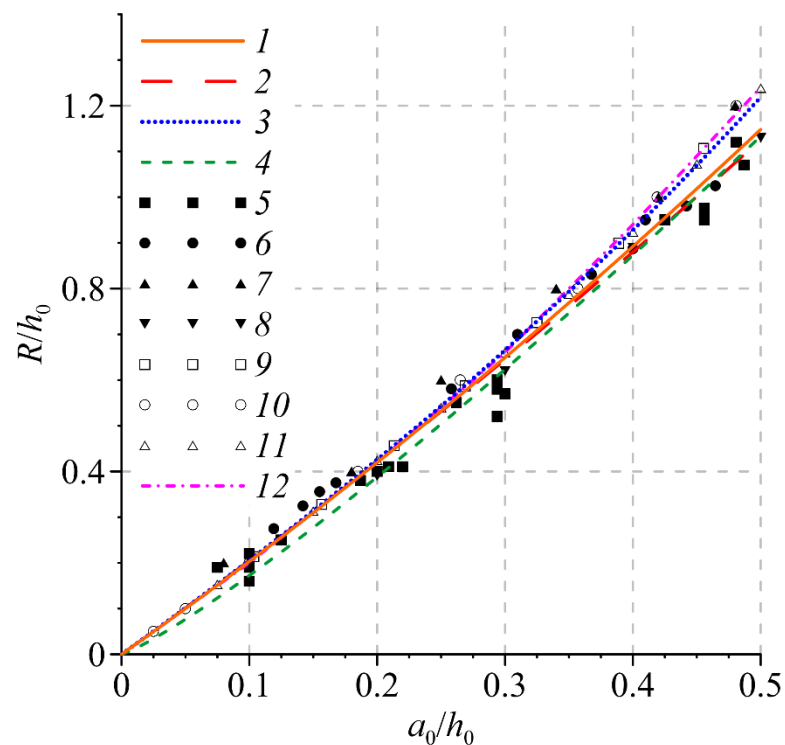
$$R = 2.55a_0^{1.17} \quad \text{- линия 4 [Liu, AlBanaa 2004]}$$

линия 12 – Pot-модель

маркеры 5-11 – эксперименты и расчёты

[Загрядская, Махworthy, Давлетшин,

Манойлин, Fenton-Rienecker1982, Chan-Street1970, Cooker1997]





Заплеск уединённой волны на *тыльную* грань полупогруженного тела

Для построения формулы, аппроксимирующей величину максимального заплеска на тыльную грань полупогруженного закрепленного тела, учитывалось, что

- при $\alpha_0 = 0$ заплеск равен нулю;
- при $d = 1$ заплеск тоже равен нулю;
- зависимость от L хорошо аппроксимируется дробно-линейной функцией;
- зависимость от d хорошо аппроксимируется дробно-рациональной функцией со степенью 2 в числителе и 1 в знаменателе;
- зависимость от α_0 хорошо аппроксимируется дробно-рациональной функцией со степенью 3 в числителе и 1 в знаменателе;



Заплеск уединённой волны на *тыльную* грань полупогруженного тела

Тогда структура «полной» формулы может быть представлена в виде

$$R_r/h_0 = a_0(1-d) \frac{k_1 a_0^2 d L + k_2 a_0^2 d + k_3 a_0^2 L + k_4 a_0^2 + k_5 a_0 d L + k_6 a_0 d + k_7 a_0 L + k_8 d L + k_9 a_0 + k_{10} d + k_{11} L + k_{12}}{k_{13} a_0 d L + k_{14} a_0 d + k_{15} a_0 L + k_{16} d L + k_{17} a_0 + k_{18} d + k_{19} L + 1}$$

Процедура оптимизации приводит к набору коэффициентов

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}
-0.084	6.21	0.24	-12.95	$-2 \cdot 10^{-3}$	-2.06	-0.07	-0.01	15.56	0.15
k_{11}	k_{12}	k_{13}	k_{14}	k_{15}	k_{16}	k_{17}	k_{18}	k_{19}	
0.013	1.1	-0.18	-12.31	1.75	-0.013	12.52	-0.99	0.027	

Максимальная относительная погрешность составляет 4.2%, средняя — 1.1%.

Итоговая «усечённая» формула:

$$R_r/h_0 = a_0(1-d) \frac{0.233a_0^2 d - 0.68a_0^2 + 1.066a_0 + 0.105}{(1-d)(a_0 + 0.094) + L \cdot (0.133a_0 + 0.00115)}$$

Максимальная относительная погрешность составляет 5.1%, средняя — 1.3%.



Горизонтальная сила, оказываемая уединённой волной на тело

Для построения формулы, аппроксимирующей величину горизонтальной составляющей силы воздействия уединённой волны, учитывалось, что

- при $a_0 = 0$ сила равна нулю;
- при $d = 1$ она не зависит от L ;
- зависимости от заглубления тела d и его длины L хорошо аппроксимировались дробно-линейными функциями
- зависимость от a_0 — дробно-рациональной, в которой степень числителя была равна 3, а знаменателя — 1;

Тогда «полная» формула может быть представлена в виде

$$F_h / (\rho g h_0^2) = a_0 \frac{L \cdot (k_1 a_0^2 d + k_2 a_0^2 + a d + k_3 a_0 + k_4 d + k_5) + (1 - d) \cdot (k_6 a_0^2 + k_7 a_0 + k_8)}{L \cdot (k_9 a_0 d + k_{10} a_0 + k_{11} d + k_{12}) + (1 - d) \cdot (k_{13} a_0 + k_{14})}$$

Процедура оптимизации приводит к набору коэффициентов

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7
-0.8	0.77	0.039	0.016	$-2.9 \cdot 10^{-4}$	0.41	-0.075
k_8	k_9	k_{10}	k_{11}	k_{12}	k_{13}	k_{14}
$2.2 \cdot 10^{-4}$	$-3.7 \cdot 10^{-3}$	0.48	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$6.7 \cdot 10^{-3}$	0.847	0.32

Максимальная относительная погрешность составляет 6.2%, средняя — 1.2%.



Горизонтальная сила, оказываемая уединённой волной на тело

Итоговая «усечённая» формула:

$$F_h / (\rho g h_0^2) = a_0 \frac{L \cdot (0.785(1-d)a_0^2 + a_0 d + 0.0329a_0 + 0.0132d) + (1-d) \cdot (0.741a_0^2 - 0.109a_0)}{L \cdot (0.477a_0 + 0.00694) + (1-d) \cdot (0.986a_0 + 0.286)}$$

Максимальная относительная погрешность составляет 6.8%, средняя — 1.3%.

В случае $d=1$ (вертикальная стенка):

$$F_h / (\rho g h_0^2) = a_0 \frac{1.0329a_0 + 0.0132}{0.477a_0 + 0.00694} \quad \text{- линия 1}$$

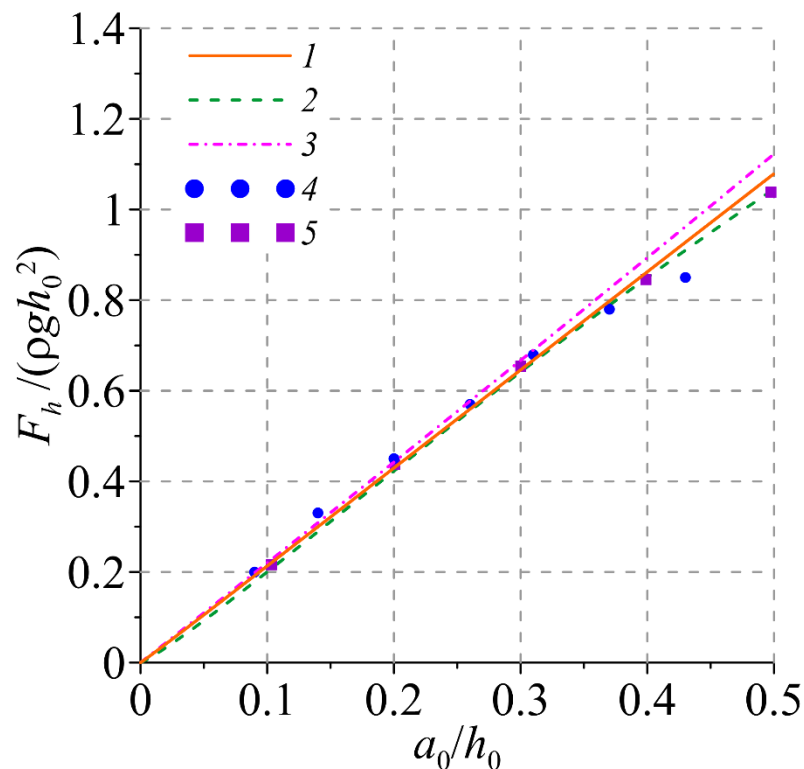
Другие известные формулы:

$$F_h / (\rho g h_0^2) = 2.65(1 - \exp(-a_0^{1.14})) \quad \text{- линия 2 [Liu, AlBanaa 2004]}$$

$$F_h / (\rho g h_0^2) = 0.11a_0^2 + 2.19a_0 \quad \text{- линия 3, Pot-модель [OE2021]}$$

маркеры 4 – эксперименты [Chen2019]

маркеры 5 – расчёты [Cooker1997]





Вертикальная сила, оказываемая уединённой волной на тело

Для построения формулы, аппроксимирующей величину вертикальной составляющей силы воздействия уединённой волны, учитывалось, что

- при $a_0 = 0$ сила равна нулю;
- при $L = 0$ вертикальная составляющая силы равна нулю;
- при $d = 1$ вертикальная составляющая силы равна нулю,

но такие расчёты исключались при построении формулы, поскольку при стремлении d к 1 не наблюдается стремление вертикальной составляющей к нулю.

- зависимость от d очень слабая и хорошо описывается линейной функцией или даже константой;
- зависимости от длины L хорошо описывается линейной функцией;
- зависимость от a_0 — хорошо описывается кубической функцией.



Вертикальная сила, оказываемая уединённой волной на тело

Тогда структура «полной» формулы может быть представлена в виде

$$F_v/(\rho gh_0^2) = aL \cdot (a^2(k_1d + k_2) + a(k_3d + k_4) + k_5d + k_6).$$

Процедура оптимизации приводит к набору коэффициентов

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6
0.83	-0.05	-0.48	-0.49	0.013	1.01

Максимальная относительная погрешность составляет 3.3%, средняя — 1%.

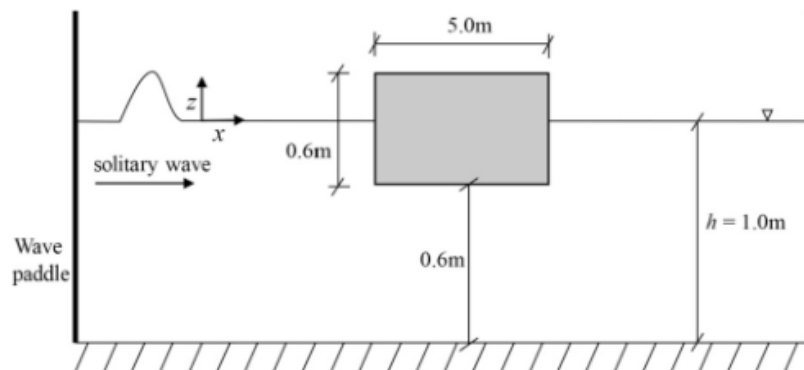
Итоговая «усечённая» формула:

$$F_v/(\rho gh_0^2) = aL \cdot (0.351a^2d - a(0.265d + 0.492) + 1).$$

Максимальная относительная погрешность составляет 4.1%, средняя — 1%.



Пример использования формул. Сравнение с расчётами по модели Эйлера

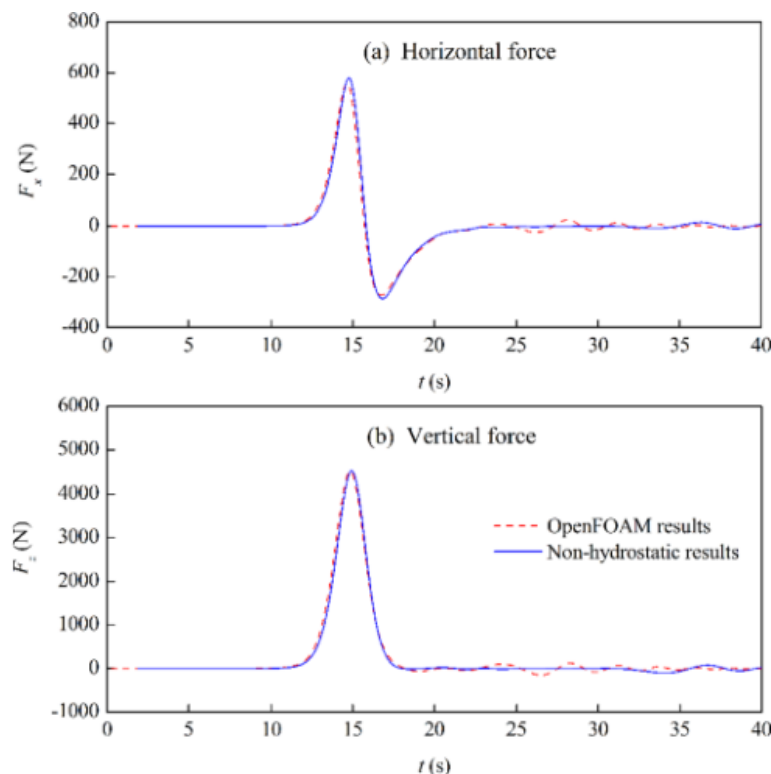


Горизонтальная составляющей силы:

- OpenFOAM - 554 Н
- негидростатическая модель 580 Н,
- формула - 514 Н (отклонение 7% и 11%)
- расчёт по SGN-модели - 510 Н

Вертикальная составляющая:

- OpenFOAM и негидростатическая модель - 4501 Н,
- формула - 4616 Н (отклонение 3%)
- расчёт по SGN-модели - 4670 Н



Yuxiang Ma, Changfu Yuan, Congfang Ai, Guohai Dong. Comparison between a non-hydrostatic model and OpenFOAM for 2D wave-structure interactions // Ocean Engineering. - 2019. - Vol.183. – P. 419-425.



Пример использования формул. Сравнение с СНиП 2.06.04-82*

где A_l и A_x - соответственно боковая и лобовая подводные площади парусности плавучих объектов, м²;

C_y , C_x - обобщающие коэффициенты продольной и поперечной силы воздействия течения, определяемые с учетом соотношения осадки плавучего объекта и глубины воды (приложение К);

V_x и V_y - поперечная и продольная составляющие скорости течения, м/с, принимаемые в соответствии с таблицей 7.

6.4 Расчетные максимальные значения поперечной Q , кН, и продольной N , кН, горизонтальных сил от воздействия волн на плавучие объекты следует определять по формулам:

$$Q = \alpha \gamma_1 \rho g h A_l, \quad (37)$$

$$N = \alpha \rho g h A_x, \quad (38)$$

где α - коэффициент, зависящий от осадки a_s , м, плавучего объекта; принимается по графику на рисунке 15;

γ_1 - коэффициент, принимаемый по таблице 9, в которой a_l - наибольший горизонтальный размер продольного силуэта подводной части плавучего объекта, м;

h - высота волны обеспеченностью 5% в системе, м;

A_l и A_x - обозначения те же, что и в 6.3.

Рисунок 15 - График значений коэффициента α

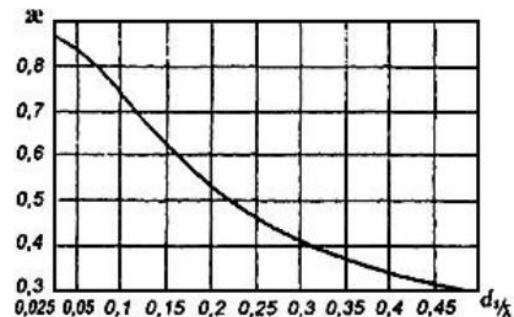


Таблица 9

a_l / λ^*	0,5 и менее	1	2	3	4 и более
Коэффициент γ_1	1	0,73	0,5	0,42	0,4

* Вероятно ошибка оригинала. Следует читать $a_l / \bar{\lambda}$. - Примечание изготовителя базы данных.



Пример использования формул. Сравнение с СНиП 2.06.04-82*

Возьмем, например, $a_0 = 0.2$, $d=0.5$, $L=5$.

Длина уединённой волны с такой амплитудой примерно $\lambda = 17$,
Тогда

$$\frac{d}{\lambda} = 0.029,$$

и из рисунка 15 следует

$$\chi = 0.85.$$

Переходя к обозначениям настоящей работы $a_l = L$, $A_l = Wd$.
Тогда

$$\frac{a_l}{\lambda} = 0.29 < 0.5$$

и из Таблицы 9 следует $\gamma_1 = 1$, в итоге

$$\frac{F_h}{\rho g h_0^2} = 0.85 d a_0 = 0.085,$$

а по полученной формуле: 0.172, в расчёте по SGN-модели: 0.174.



- ✓ Получены формулы для вычисления характеристик воздействия бора и уединённой волны на полупогруженное тело, полученные на основе результатов расчётов в рамках моделей мелкой воды
- ✓ Приведены их максимальные и средние относительные погрешности
- ✓ Для частных случаев выполнены сравнения с известными формулами и результатами

Было замечено, что получаемые формулы существенно зависят от:

- используемой модели и численного алгоритма – **важно учитывать границы применимости!**
- диапазона параметров
- массивов параметров
- вида «полной» формулы

Дальнейшее развитие видится в

- применении более точных моделей и расширении границ применимости (в частности, для более коротких тел с $L < 3$)
- исследовании других типов волн (с возможностью задать **длину** волны)



Спасибо за внимание!



Про плохие алгоритмы

Chang, C.-H., Wang, K.-H., Hseih, P.-C., 2017. Fully nonlinear model for simulating solitary waves propagating through a partially immersed rectangular structure. *J. Coastal Res.* 33 (6), 1487–1497.

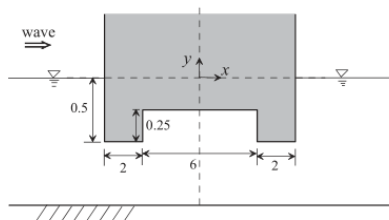


Figure 17. Sketch of a partially submerged structure with an excavated bottom.

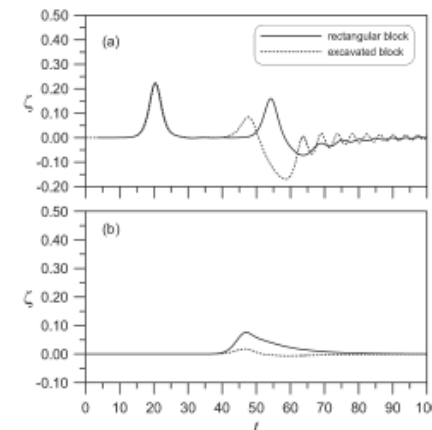


Figure 18. Comparisons of the free-surface elevations obtained from the present numerical model considering the cases of a rectangular block with dimensions given in Figure 16 and an excavated block as shown in Figure 17 for (a) $x = -19.5$ for incident and reflected waves, and (b) $x = 15.5$ for transmitted waves.

O.I. Gusev et al.

Ocean Engineering 267 (2023) 113284

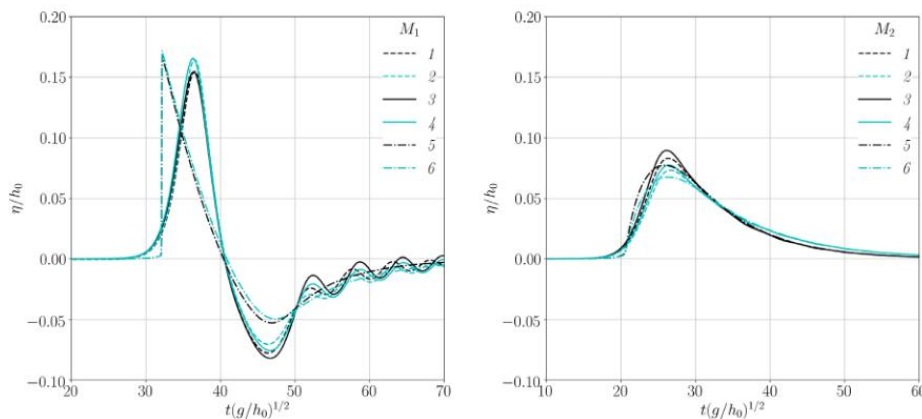


Fig. 4. Marigrams M_1 (left) and M_2 (right) calculated by the models Pot (1,2), SGN (3,4) and SV (5,6) when solving the problem with the cut in the body bottom (1,3,5) and without it (2,4,6).



Про плохие алгоритмы - 2

Chang, C.H., 2017. Study of a solitary wave interacting with a surface piercing square cylinder using a three-dimensional fully nonlinear model with grid-refinement technique on surface layers. J. Mar. Eng. Technol. 16 (1), 22–36.

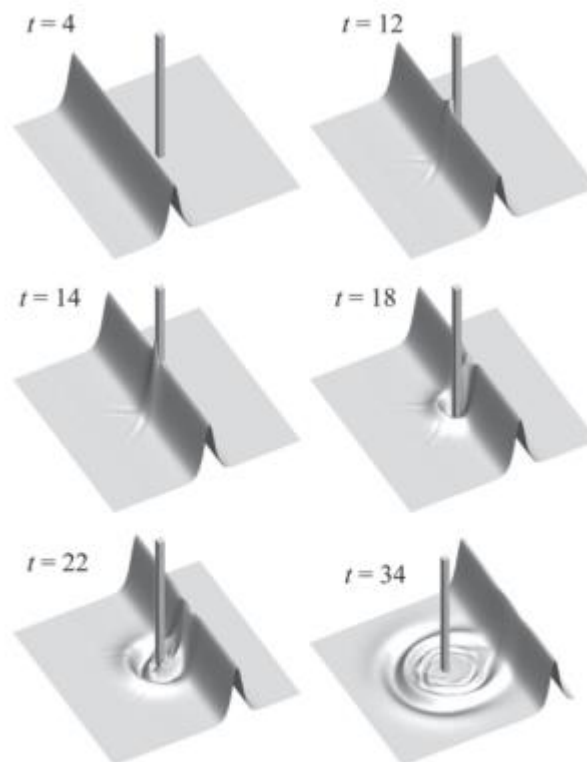


Figure 14. Snapshots of the 3D wave patterns of the solitary wave ($\alpha = 0.3$) diffracted by a vertical square cylinder without gap ($D = 0$).



Chen, Y.Y., Li, Y.J., Hsu, H.C., Hwung, H.H., 2019b. The pressure distribution beneath a solitary wave reflecting on a vertical wall. *Eur. J. Mech. B Fluid* 76, 66–72.

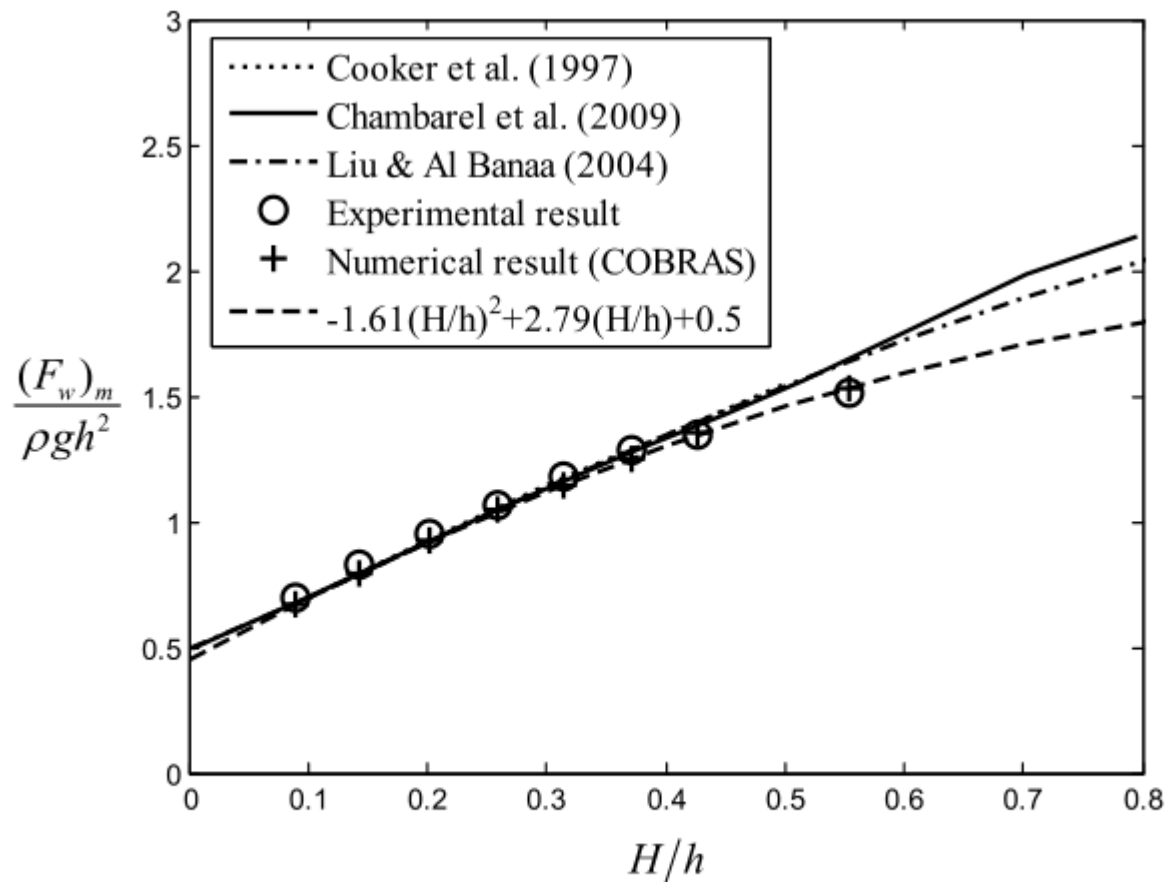


Fig. 17. Maximum instantaneous force as a function of nonlinear parameter H/h .



Про поиск «оптимальных» коэффициентов.

Basin-hopping

Basin-hopping is a stochastic algorithm which attempts to find the global minimum of a smooth scalar function of one or more variables [1] [2] [3] [4]. The algorithm in its current form was described by David Wales and Jonathan Doye [2] <http://www-wales.ch.cam.ac.uk/>.

The algorithm is iterative with each cycle composed of the following features

1. random perturbation of the coordinates
2. local minimization
3. accept or reject the new coordinates based on the minimized function value

The acceptance test used here is the Metropolis criterion of standard Monte Carlo algorithms, although there are many other possibilities [3].

This global minimization method has been shown to be extremely efficient for a wide variety of problems in physics and chemistry. It is particularly useful when the function has many minima separated by large barriers. See the [Cambridge Cluster Database](#) for databases of molecular systems that have been optimized primarily using basin-hopping. This database includes minimization problems exceeding 300 degrees of freedom.

See the free software program [GMIN](#) for a Fortran implementation of basin-hopping. This implementation has many variations of the procedure described above, including more advanced step taking algorithms and alternate acceptance criterion.

For stochastic global optimization there is no way to determine if the true global minimum has actually been found. Instead, as a consistency check, the algorithm can be run from a number of different random starting points to ensure the lowest minimum found in each example has converged to the global minimum. For this reason, `basinhopping` will by default simply run for the number of iterations `niter` and return the lowest minimum found. It is left to the user to ensure that this is in fact the global minimum.

References

- [1] Wales, David J. 2003, Energy Landscapes, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [2][1,2] Wales, D J, and Doye J P K, Global Optimization by Basin-Hopping and the Lowest Energy Structures of Lennard-Jones Clusters Containing up to 110 Atoms. Journal of Physical Chemistry A, 1997, 101, 5111.
- [3][1,2] Li, Z. and Scheraga, H. A., Monte Carlo-minimization approach to the multiple-minima problem in protein folding, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1987, 84, 6611.
- [4] Wales, D. J. and Scheraga, H. A., Global optimization of clusters, crystals, and biomolecules, Science, 1999, 285, 1368.
- [5] Olson, B., Hashmi, I., Molloy, K., and Shehu1, A., Basin Hopping as a General and Versatile Optimization Framework for the Characterization of Biological Macromolecules, Advances in Artificial Intelligence, Volume 2012 (2012), Article ID 674832, [DOI:10.1155/2012/674832](https://doi.org/10.1155/2012/674832)



Про поиск «оптимальных» коэффициентов.

least_squares

Method 'lm' (Levenberg-Marquardt) calls a wrapper over least-squares algorithms implemented in MINPACK (lmdr, lmdif). It runs the Levenberg-Marquardt algorithm formulated as a trust-region type algorithm. The implementation is based on paper [\[JJMore\]](#), it is very robust and efficient with a lot of smart tricks. It should be your first choice for unconstrained problems. Note that it doesn't support bounds. Also, it doesn't work when $m < n$.

Method 'trf' (Trust Region Reflective) is motivated by the process of solving a system of equations, which constitute the first-order optimality condition for a bound-constrained minimization problem as formulated in [\[STIR\]](#). The algorithm iteratively solves trust-region subproblems augmented by a special diagonal quadratic term and with trust-region shape determined by the distance from the bounds and the direction of the gradient. This enhancements help to avoid making steps directly into bounds and efficiently explore the whole space of variables. To further improve convergence, the algorithm considers search directions reflected from the bounds. To obey theoretical requirements, the algorithm keeps iterates strictly feasible. With dense Jacobians trust-region subproblems are solved by an exact method very similar to the one described in [\[JJMore\]](#) (and implemented in MINPACK). The difference from the MINPACK implementation is that a singular value decomposition of a Jacobian matrix is done once per iteration, instead of a QR decomposition and series of Givens rotation eliminations. For large sparse Jacobians a 2-D subspace approach of solving trust-region subproblems is used [\[STIR\]](#), [\[Byrd\]](#). The subspace is spanned by a scaled gradient and an approximate Gauss-Newton solution delivered by [scipy.sparse.linalg.lsmr](#). When no constraints are imposed the algorithm is very similar to MINPACK and has generally comparable performance. The algorithm works quite robust in unbounded and bounded problems, thus it is chosen as a default algorithm.

Method 'dogbox' operates in a trust-region framework, but considers rectangular trust regions as opposed to conventional ellipsoids [\[Voglis\]](#). The intersection of a current trust region and initial bounds is again rectangular, so on each iteration a quadratic minimization problem subject to bound constraints is solved approximately by Powell's dogleg method [\[NumOpt\]](#). The required Gauss-Newton step can be computed exactly for dense Jacobians or approximately by [scipy.sparse.linalg.lsmr](#) for large sparse Jacobians. The algorithm is likely to exhibit slow convergence when the rank of Jacobian is less than the number of variables. The algorithm often outperforms 'trf' in bounded problems with a small number of variables.

References

- [STIR][\(1,2,3\)](#) M. A. Branch, T. F. Coleman, and Y. Li, "A Subspace, Interior, and Conjugate Gradient Method for Large-Scale Bound-Constrained Minimization Problems," SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 21, Number 1, pp 1-23, 1999.
- [NR] William H. Press et. al., "Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing. 3rd edition", Sec. 5.7.
- [Byrd][\(1,2\)](#) R. H. Byrd, R. B. Schnabel and G. A. Shultz, "Approximate solution of the trust region problem by minimization over two-dimensional subspaces", Math. Programming, 40, pp. 247-263, 1988.
- [Curtis] A. Curtis, M. J. D. Powell, and J. Reid, "On the estimation of sparse Jacobian matrices", Journal of the Institute of Mathematics and its Applications, 13, pp. 117-120, 1974.
- [JJMore][\(1,2,3\)](#) J. J. More, "The Levenberg-Marquardt Algorithm: Implementation and Theory," Numerical Analysis, ed. G. A. Watson, Lecture Notes in Mathematics 630, Springer Verlag, pp. 105-116, 1977.
- [Voglis] C. Voglis and I. E. Lagaris, "A Rectangular Trust Region Dogleg Approach for Unconstrained and Bound Constrained Nonlinear Optimization", WSEAS International Conference on Applied Mathematics, Corfu, Greece, 2004.
- [NumOpt] J. Nocedal and S. J. Wright, "Numerical optimization, 2nd edition", Chapter 4.
- [BA] B. Triggs et. al., "Bundle Adjustment - A Modern Synthesis", Proceedings of the International Workshop on Vision Algorithms: Theory and Practice, pp. 298-372, 1999.